УЧИТЕЛЬСКАЯ БИБЛІОТЕКА.

КАКЪ ПОСТЕПЕННО ДОШЛИ ЛЮДИ ДО НАСТОЯЩЕЙ АРИѲМЕТИКИ.

Общедоступные очерки для любителей ариѳметики.

Изданіе журнала „ПЕДАГОГИЧЕСКІЙ ЛИСТОКЪ“.

Москва, Б. Молчановка, д. № 24.

Составилъ

В. Беллюстинъ.

МОСКВА.

Типографія И. К. Прянишникова, Цвѣтной бульваръ, д. № 21.

Всякому, кто любитъ свой предметъ, бываетъ интересно знать, какъ онъ начался, какимъ путемъ онъ развивался, и какъ онъ вылился въ свою послѣднюю форму. Въ этой книжкѣ изложена исторія ариѳметики, и очерки ея назначены для тѣхъ, кто чувствуетъ расположеніе къ математикѣ. Юнымъ математикамъ я прежде всего назначаю свой трудъ. Онъ же можетъ пригодиться и для педагога: для учителя крайне важно, чтобы расширился его кругозоръ, чтобы онъ могъ критически отнестись къ настоящему положенію преподаванія, и чтобы историческія данныя оживили обученіе и освѣтили его.

Въ Германіи имѣется масса сочиненій по исторіи математики; очевидно, они нужны и полезны. Пусть же и въ Россіи мой небольшой трудъ сослужитъ свою скромную службу Можетъ-быть, въ немъ есть невольные промахи и недочеты; но вѣдь такъ трудно работать въ глуши, вдали отъ библіотекъ и спеціалистовъ, и выписывать пособія изъ Лейпцига и Берлина въ село, которое неблизко отстоитъ отъ города.

Начало ариѳметики.

Кто положилъ начало ариѳметикѣ, и кто первый изъ людей „изобрѣлъ" счетъ, на это отвѣтить нельзя Мы можемъ назвать лицо, которое изобрѣло компасъ или книгопечатаніе, порохъ и паровую машину; насъ можетъ интересовать, кто открылъ магнитъ, или кто приготовилъ писчую бумагу: но никакъ нельзя рѣшать вопроса, кто положилъ начало счету. Умѣнье считать, по крайней мѣрѣ, въ небольшихъ предѣлахъ, а также и потребность считать присущи всякому мыслящему существу. Подобно тому, какъ живой человѣкъ непремѣнно дышитъ и питается, такъ точно и человѣкъ, живущій умственной жизнью, мыслитъ, говоритъ и, между прочимъ, считаетъ.

Итакъ, не можетъ быть и рѣчи о какомъ-то особомъ изобрѣтателѣ счета, такъ какъ эта потребность свойственна всѣмъ людямъ. Поэтому начало ариѳметики тонетъ въ тѣхъ же безпредѣльныхъ глубинахъ отдаленныхъ вѣковъ, какъ и начало человѣчества. Между тѣмъ наивные авторы старинныхъ учебниковъ искали, во что бы то ни стало, указать лицо или народъ, которому счетъ обязанъ своимъ началомъ. Такъ, напр., въ славянскихъ рукописяхъ времени царя Алексѣя Михайловича эта честь приписывается «древле эллинскому мудрецу Пиѳагору, сыну Аглинанорову» или же «Сиру, сыну Аенинорову.», написавшему «численную сію философію (т.-е. ариѳметику) финическими письменами». Византійскіе историки среднихъ вѣковъ шли еще дальше и не стѣснялись признавать прямо чудесное происхожденіе ариѳметики: ее де обнародовалъ на землѣ нѣкто Фениксъ, внукъ бога Нептуна.

Все это, конечно, фантазія: но на чемъ-нибудь должна же она быть основана. Такое основаніе можно видѣть въ общепризнанной славѣ, которою пользовался знаменитый греческій математикъ Пиѳагоръ, равно какъ и финикійны, развитые, образованные и промышленные представители древняго міра, отважные мореплаватели, объѣзжавшие на своихъ корабляхъ берега Средиземнаго моря. Финикійцамъ приписывается также изобрѣтеніе буквъ алфавита.

Первыя ступени счисленія.

Какъ считали наши предки, жившіе въ отдаленныя времена задолго до Рождества Христова,—объ этомъ прямо и достовѣрно судить нельзя: письменныхъ свидѣтельствъ не сохранилось, да ихъ и не могло быть, потому что развитіе письменнаго счета зависитъ отъ общаго развитія образованія а наши древнѣйшіе родичи находились, очевидно, на низшихъ ступеняхъ образованности. Судить о первыхъ шагахъ ариѳметики мы можемъ только по догадкамъ, сравнительно: средствомъ же для сравненія являются тѣ дикіе и малообразованные народы, затерявшіеся въ укромныхъ уголкахъ внутренней Африки, Америки и т. д., которые въ настоящее время едва выходятъ изъ первобытнаго состоянія.

Займемся американскими индѣйцами и африканскими неграми.

Индѣйцы Таманаки пользуются при счетѣ пальцами рукъ и ногъ. Вмѣсто «одинъ» они говорятъ «палецъ» и при этомъ обязательно протягиваютъ палецъ; вмѣсто «два —«два пальца», «три»—«три пальца». Пять у нихъ зовется «рука», 6—«палецъ на другой рукѣ», 7—«два пальца на другой рукѣ» 10—«двѣ руки». Покончивши съ руками, они перебираются къ ногамъ, и такъ какъ обувь не закрываетъ ихъ ногъ, то продолжаютъ считать наглядно: 11—«палецъ на ногѣ», 12—«два пальца на ногѣ», 15—«нога и двѣ руки». 16—«палецъ на другой ногѣ». Но вотъ подходитъ дѣло къ 20-ти, использованы, слѣдовательно, и руки и ноги, тогда является на помощь «человѣкъ». 20 называется «человѣкъ, такъ какъ у него 20 пальцевъ: какъ же выразить, напр., 27? Это будетъ—«2 пальца на другой рукѣ другого человѣка». Сотня замѣняется у нихъ пятью человѣками, а выше сотни бѣдные индѣйцы едва ли и порываются считать, потому что у нихъ нѣтъ для этого ни потребностей, ни развитія. Кстати сказать, и эскимосы, обитатели холодныхъ странъ Сѣверной Америки, вмѣсто «20» говорятъ «человѣкъ» и вмѣсто «100» пять человѣкъ.

Карайбы на Антильскихъ островахъ и по рѣкѣ Ориноко даютъ первымъ четыремъ числамъ особыя имена, но 5 у нихъ замѣняется словами «четыре и одинъ», 6—«рука и одинъ», 7—«рука и два», 20—«столько, сколько руки и ноги», 30—«столько, сколько руки и ноги, и еще 2 руки лишнихъ».

Удивительна склонность индѣйцевъ и негровъ не довольствоваться однимъ словеснымъ счетомъ, а всячески дополнять его выразительными жестами. Говоря «шесть», они протягиваютъ 6 пальцевъ. Дойдя до 20, они разставляютъ ноги, вытягиваютъ руки и растопыриваютъ пальцы.

Зулусы въ Южной Африкѣ пользуются очень похожимъ обычаемъ. Они обходятся безъ ногъ и ведутъ расчеты на однѣхъ рукахъ. Они начинаютъ счетъ съ мизинца лѣвой руки. Когда окончатъ первый десятокъ, то второй десятокъ ведутъ уже съ мизинца правой руки. Если, напримѣръ, на правой рукѣ протянуты мизинецъ и безыменный палецъ, то это означаетъ 12. Послѣ каждаго десятка они хлопаютъ рукой объ руку. Чтобы выразить, наприм., число 35, имъ надо трижды хлопнуть рукой объ руку и протянуть 5 пальцевъ правой руки.

Такимъ образомъ, пальцы для того человѣка, который едва умѣетъ считать, являются неоцѣненнымъ и удобнѣйшимъ пособіемъ. Это мы можемъ прослѣдить во всѣхъ странахъ земного шара и у всѣхъ людей. Для счета имъ нужно наглядное пособіе, а какое же пособіе ближе къ человѣку, какъ не его собственные пальцы? Особенно ихъ любятъ дикари и малыя дѣти.

Теперь является вопросъ: какъ быть съ числами, которыя включаютъ въ себѣ десятки и сотни? Какъ ихъ выразить при помощи пальцевъ? Отвѣтить на это могутъ нѣкоторыя племена Южной Африки, которыя для единицъ берутъ одного счетчика, для десятковъ другого, а для сотенъ третьяго. Какъ только первый счетчикъ насчитаетъ по пальцамъ десять, второй сейчасъ же замѣчаетъ это у себя на пальцахъ, т.-е. протягиваетъ мизинецъ. Когда второму придется протянуть всѣ 10 своихъ пальцевъ, то третій замѣчаетъ получившуюся сотню однимъ пальцемъ своей руки.

Дикари, подобно малымъ дѣтямъ, не нуждаются въ большихъ числахъ. Толчокъ къ развитію счета дается обыкновенно лишь возникновеніемъ торговли и промышленности. Самая нехитрая торговля— мѣновая, когда покупщикъ даетъ одинъ товаръ, а продавецъ взамѣнъ того другой. Мѣновая торговля сама уже приводитъ къ мысли, что счетъ можно вести на какихъ угодно предметахъ. И какихъ только предметовъ при первоначальной мѣновой торговлѣ не берется простодушными торговцами въ пособіе для счета! Напр., негритянскіе купцы постоянно носятъ съ собой мѣшочекъ съ маисовыми зернами, иногда и съ камешками. Какъ только дѣло подходитъ къ расчету, они сейчасъ же высыпаютъ зерна и пользуются ими, какъ очень удобнымъ пособіемъ. И съ какимъ искусствомъ, съ какою ловкостью безграмотный негръ подводитъ итоги, высчитываетъ прибыль и убытокъ при помощи своихъ зернышекъ! Онъ не станетъ втупикъ даже и при составныхъ именованныхъ числахъ, такъ какъ для каждой мѣры у него въ запасѣ есть особый сортъ зернышекъ. Конечно, всѣ ихъ хитросплетенія покажутся намъ, знающимъ ариѳметику, наивными и незамысловатыми. Такъ, напр., сторговавши нѣсколько кусковъ матеріи, негры кладутъ противъ каждаго куска столько камешковъ, сколько монетъ надо отдать за кусокъ, и потомъ все это сосчитываютъ.

Трудно даются первые шаги счета мало образованнымъ народамъ.

Также и дѣтямъ нашимъ нелегко приходится, когда они начинаютъ счисленіе. Необходимо нужны наглядныя пособія. Всякій человѣкъ и всѣ народы прибѣгали къ нимъ и прибѣгаютъ, потому что потребность въ наглядности лежитъ въ природѣ человѣка. Кромѣ камешковъ, зернышекъ и т. д., можно пользоваться зарубками, чертами, крестиками. Такъ, индѣецъ дѣлаетъ зарубку на деревѣ всякій разъ, какъ онъ добываетъ скальпъ. И у насъ въ Россіи въ простомъ народѣ, среди неграмотныхъ крестьянъ, черточки и зарубки въ большомъ употребленіи: сельскій староста отмѣчаетъ ими поступленіе податей, плотникъ порядокъ бревенъ, молочница выданное молоко. Ацтеки, старинные обитатели Мексики, предпочитали обозначать числа точками, при чемъ они располагали точки не какъ придется, а въ видѣ правильныхъ фигуръ, въ родѣ тѣхъ, какія теперь у насъ рисуются на игральныхъ картахъ. Когда у счетчиковъ накапливалось много камешковъ, шариковъ или косточекъ, то чтобы ихъ не растерять, они нанизывали ихъ на шнурочки или прутья. Этимъ былъ данъ толчокъ къ изобрѣтенію счетныхъ приборовъ, изъ которыхъ прежде всего нужно упомянуть русскіе торговые счеты и китайскій инструментъ «сванъ-панъ», очень похожій на наши счеты.

Начальныя числительныя имена.

Рука объ руку съ развитіемъ счисленія идетъ и образованіе числительныхъ именъ. Числа это—идеи: они требуютъ словеснаго выраженія.

Филологи, знатоки языковъ, не мало и съ большимъ успѣхомъ потрудились надъ вопросомъ: какъ образовались слова, выражающія числа: «одинъ», «два» и т. д.? Они признали, что вѣроятно первыя числительныя имена взяты отъ тѣхъ вещей, которыя встрѣчаются всегда въ опредѣленномъ количествѣ, и именно въ такомъ, каково само число. Такъ, у индусовъ слово «два» созвучно со словомъ «глазъ»; у малайцевъ (на островѣ Явѣ) слово пять обозначаетъ въ тоже время руку. И это понятно: глаза обыкновенно встрѣчаются въ количествѣ двухъ, а пальцы въ количествѣ пяти. И у насъ въ славянскомъ языкѣ «пять» созвучно съ «пядь»: подъ пядью разумѣется длина, которая равна разстоянію между растопыренными крайними пальцами руки.

Но само собой разумѣется, что отъ сходства словъ можетъ произойти смѣшеніе и сбивчивость понятій. Поэтому у образованныхъ націй давно, съ незапамятныхъ временъ, выработались особенныя числительныя имена, которыя не сходны съ именами какихъ бы то ни было предметовъ. Что это случилось очень давно, мы можемъ видѣть на примѣрѣ индо-европейской семьи народовъ, и доказывается это такимъ соображеніемъ. Мы, славяне, а также нѣмцы, французы, индусы и греки должны считаться отдѣльными отпрысками общаго корня, обитавшаго въ глубокой древности въ Индостанѣ. Легко прослѣдить, что первыя числительныя имена очень сходны и созвучны во всѣхъ индо-европейскихъ языкахъ, а изъ этого мы вправѣ вывести, что эти числительныя имена выработались еще въ ту отдаленную эпоху, когда не было великаго разселенія народовъ, и когда вся индо-европейская семья жила вмѣстѣ и пользовалась общимъ языкомъ.

Вотъ таблица, въ которой представлены латинскими буквами числительныя имена изъ 5 иностранныхъ языковъ и изъ 6-го нашего русскаго цифрами.

Русскій языкъ . .	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Санскритскій. . .	eka	dva (dvi)	tri	catvár	páñcan	sas	sáptan	ástan	návan	dásan
Старо-французскій. .	unan (un)	daou	tri	peuar	pemp	cheab	seis	eis	nao	dek
Нѣмецкій . .	ein	zwei	drei	vier	fünf	sechs	sieben	acht	neun	zehn
Латинскій . .	unus	duo	tres	quatuor	quinque	sex	septem	octo	novem	decem
Греческій . .	heis	duo	treis	tessares	pente	hex	hepta	octo	ennea	deka

Различныя системы счисленія.

Почти всѣ цивилизованные народы древняго и новаго міра ввели у себя десятичную систему счета. Именно они считаютъ единицами до десяти, десятками — до сотни, сотнями — до тысячи и т. д. Иначе сказать: десять единицъ составляютъ десятокъ, десять десятковъ — сотню, десять сотенъ тысячу и т. д. Откуда же произошло такое удивительное согласіе всѣхъ людей? Почему у всѣхъ одна система счета? Немыслимо вѣдь допустить, что обитатели различныхъ точекъ земного шара устроили нѣчто въ родѣ совѣщанія, на которомъ и постановили принять одну общую систему. Разгадка, очевидно, заключается въ слѣдующемъ. Отвлеченный счетъ начался у всѣхъ народовъ съ предметнаго, нагляднаго, а лучшимъ пособіемъ для счета, какъ наиболѣе доступнымъ и удобнымъ, являются для человѣка его пальцы. Что ближе пальцевъ, проще и дешевле? Смѣются надъ неграмотными, надъ малыми дѣтьми и надъ старухами, когда они безъ пальцевъ не могутъ счесть и малыхъ чиселъ: это напрасно, потому что потребность въ наглядномъ представленіи идей при помощи предметовъ присуща человѣческой природѣ, и всякій человѣкъ, который мало развитъ, ищетъ нагляднаго пособія, стремится выбрать наиболѣе удобное и невольно наталкивается въ нашемъ случаѣ на пальцы.

Впрочемъ, прибѣгая къ пальцамъ, мы могли бы выработать не только десятичную систему, но и пятеричную, двадцатеричную. Если пользоваться одной рукой, то будетъ пятеричная система, двумя — десятичная, руками и ногами—двадцатеричная. Въ такомъ случаѣ мы стали бы считать пятками, 5 пятковъ соединять въ новую группу, 5 такихъ группъ въ еще большую новую и т. д. Это мы и видимъ у нѣкоторыхъ африканскихъ народовъ, которые любятъ считать пятками и вмѣсто „шесть" говорятъ „пять одинъ", вмѣсто «семь» — „пять два" и т. д. По примѣру многихъ народовъ,— напр., феллаховъ, индѣйцевъ, можно судить, что пятеричная система является очень древней и, можетъ-быть, даже болѣе древней, чѣмъ десятичная, такъ что отсюда можно предположить, что люди считали нѣкогда пятками и ужъ позднѣе перешли къ счету десятками.

Что касается двадцатеричной системы, то во всей чистотѣ она, правда, не встрѣчается, но въ смѣшеніи съ десятичной ее можно прослѣдить во многихъ случаяхъ. Такъ, индѣйцы Майя въ Юкатанѣ пользуются особыми словами для чиселъ 20, 400 (20 разъ по 20), 800 (20 разъ по 400) и 160000 (20 разъ по 800). У ацтековъ въ Мексикѣ были особыя слова для чиселъ 20, 400, 8000. Остатки двадцатеричной системы замѣтны и во французскомъ языкѣ: quatre vingt = 80, т. е. четырежды 20: sixvingt, quinze vingt. Также и въ датскомъ языкѣ слово шестьдесятъ (tresindstive) выражаетъ трижды двадцать, а слово восемьдесятъ (firsindstive) — четырежды двадцать.

Пальцевыя системы — самыя старинныя и древнія, и самыя распространенныя. Но, кромѣ нихъ, есть и другія, изъ которыхъ прежде всего мы назовемъ счетъ дюжинами, или двѣнадцатеричную систему. Это очень распространенный счетъ. Мы тоже нерѣдко считаемъ дюжинами, напр., посуду, перья, карандаши, бѣлье. Откуда взялось такое обыкновеніе? На это прямо отвѣтить нельзя, потому что мы не знаемъ; знаемъ только, что оно въ особенномъ ходу было у римлянъ и у нихъ имѣетъ корень, повидимому, въ томъ, что въ году 12 мѣсяцевъ. При счетѣ дюжинами мы идемъ до 12 дюжинъ, такъ что 12 дюжинъ составляютъ новую единицу „гроссъ", въ каждой коробкѣ перьевъ, обыкновенно, бываетъ ровно „гроссъ"; также и карандаши связываются въ большія пачки по гроссамъ; счетъ гроссами идетъ до 12-ти, а 12 гроссовъ даютъ уже новую единицу — „массу". Счетъ дюжинами, гроссами и массами очень удобенъ и даже могъ бы быть удобнѣе счета десятками и сотнями, но онъ привился слабо, и всѣ наши числительныя имена примѣнены къ десятичному счету, а не къ дюжинному; языкъ, конечно, передѣлать нельзя, и это очень жаль, потому что при дюжинномъ счетѣ много облегчилось бы вычисленіе, сравнительно съ десятичнымъ; напр., самое трудное изъ четырехъ дѣйствій, дѣленіе, не такъ бы часто приводило къ остаткамъ и къ дробямъ, какъ сейчасъ, потому что 12 дѣлится на 2, на 3, 4, 6, между тѣмъ 10 разлагается только на 2 и на 5, и поэтому при дѣленіи приходится очень часто получать остатки и дроби. Особенно любили римляне число 12 въ дробяхъ. Двѣнадцатыя доли назывались у нихъ унціями. Это были двѣнадцатыя части какой угодно величины, такъ, напр., $^1/_{12}$ хлѣба называлась унціей хлѣба, $^5/_{12}$ капитала составляли 5 унцій капитала. Въ настоящее время унціи остались только въ „латинской кухнѣ", т.-е. въ аптекарскомъ вѣсѣ, именно унція составляетъ $^1/_{12}$ аптекарскаго, иначе сказать римскаго фунта (римскій фунтъ на $^1/_8$ меньше нашего): въ древности эти доли были въ повсемѣстномъ употребленіи до того, что, напр., вмѣсто $^1/_8$ писали $1^1/_2$ унціи, для $^1/_{12}$, $^2/_{12}$, $^3/_{12}$, до $^{11}/_{12}$ имѣлись особые значки, въ родѣ цифръ, и особыя названія: вообще двѣнадцатыя доли напоминали собою скорѣе именованныя числа, чѣмъ дѣйствительныя дроби.

Мы разсмотрѣли счетъ дюжинами. Теперь займемся счетомъ группами по 60, такъ считали халдеи. Халдеи были волхвами, звѣздочетами и астрономами древности; имъ мы обязаны тѣмъ, что въ часѣ 60 минутъ и въ минутѣ 60 секундъ, также и въ угловомъ градусѣ 60 минутъ: у нихъ, между прочимъ, и день дѣлился на 60 часовъ. Число выше 60 халдеи разлагали на 60 и на остатокъ: напр., чтобы выразить 87, они говорили 60 и 27. Число 60 имѣло у халдеевъ свое особое названіе „soss", также и 3,600, равное 60×60, спеціально называлось словомъ «sar». Работы халдеевъ въ астрономіи были выдающимися въ древнемъ мірѣ. Неудивительно поэтому, что ихъ вліяніе чувствуется и въ позднѣйшей наукѣ: отсюда проистекаетъ то предпочтеніе, которое дается числу 60 въ астрономіи. Халдеи считали въ году 360 дней, т.-е. 60×6, и окружность дѣлили на 360 равныхъ частей или градусовъ; слѣдовательно, градусомъ экватора они считали путь, который пробѣгаетъ солнце въ одни сутки.

Вотъ мы поименовали самыя употребительныя системы счета; изъ нихъ самая распространенная и развитая— десятичная: счетъ десятками можно прослѣдить у всѣхъ народовъ, не исключая даже и тѣхъ, которые предпочитали пользоваться пятками и дюжинами или же группами по 20 и по 60.

Изъ другихъ системъ, не приведенныхъ нами, мы можемъ указать лишь слабые намеки; такъ, напр., ново-зеландцы считаютъ группами въ 11, и у нихъ есть особыя коренныя слова для 11, 121 ($=11 \times 11$), 1331 ($=11 \times 11 \times 11$): на ихъ языкѣ 12 замѣняется одиннадцатью однимъ, 13—одиннадцатью двумя, 22—дважды одиннадцать, 33 трижды 11 и т. д.

Вспомнимъ кстати, что наши предки тоже считали иногда при помощи особыхъ своеобразныхъ единицъ—сороковъ: сорокъ сороковъ церквей, пять сороковъ соболей, слѣдовательно, у нихъ единицей счета служила група въ сорокъ.

Итакъ, у всѣхъ народовъ идетъ счетъ десятками, сотнями, тысячами и т. д. Какъ же изъ этихъ группъ или изъ этихъ сложныхъ единицъ образуются многозначныя числа? Въ нашемъ русскомъ языкѣ для этого обыкновенно существуетъ одинъ путь: сложеніе и повтореніе. Что значитъ, напр., тринадцать? три-на-десять, т.-е. 10 + 3, здѣсь мы видимъ сложеніе; что значитъ тридцать? тридцать, трижды десять: здѣсь встрѣчаемъ мы повтореніе, иначе сказать умноженіе 10 на 3: въ выраженіи «триста двадцать» содержится два повторенія „три-ста", „два-десять"—и одно сложеніе—„триста двадцать". Но не такъ просто рѣшается этотъ вопросъ въ другихъ языкахъ. Въ нихъ для образованія сложныхъ чиселъ берутся и другія два дѣйствія,—вычитаніе и дѣленіе; напр., по латыни восемнадцать будетъ duodeviginti, это значитъ двадцать безъ двухъ, девятнадцать—undeviginti, это значитъ двадцать безъ одного. По-санскритски 95 выражается черезъ pantchonangsatam, что значитъ сто безъ пяти. Что касается дѣленія, то имъ иногда образуются числа, и у насъ, напр., вмѣсто „пятьдесятъ" говорятъ число полсотни. Въ датскомъ языкѣ 60 выражается черезъ трижды двадцать (tresindstyve)—объ этомъ мы говорили выше, а 50 черезъ $2^1/_2$ раза по 20 =halvtresindstyve, здѣсь уже дѣленіе. Но вообще говоря, чѣмъ система счета развитѣе, тѣмъ болѣе приближается она къ десятичной и тѣмъ яснѣе проявляется образованіе чиселъ при помощи сложенія и умноженія. У насъ, напр., въ русскомъ языкѣ числа отъ 11 до 20 словесно выражены не очень ясно, напр., „пятнадцать" вмѣсто „десять и пять", но, начиная съ 21, составъ чиселъ уже гораздо яснѣе, и мы встрѣчаемъ такія выраженія: „двадцать пять", „тридцать шесть" и т. п., въ которыхъ десятки ясно разграничены съ единицами; подобно этому полные десятки въ предѣлѣ ста выражены не совсѣмъ ясно: „тридцать" вмѣсто «три десятка», а сотни выражены уже яснѣе: „триста" вмѣсто „три сотни", а тысячи совершенно ясно „три тысячи". Нашимъ дѣтямъ, которыя начинаютъ учиться ариѳметикѣ, легче въ этомъ случаѣ, чѣмъ, напр., нѣмецкимъ: тамъ для чиселъ 11 и 12 употребляются такія слова, изъ которыхъ не видно разложенія ихъ на десятокъ и единицы; кромѣ того, въ двузначныхъ числахъ въ нѣмецкомъ языкѣ выговариваются сперва единицы, а потомъ уже десятки, т.-е., какъ разъ обратно тому, какъ числа обозначаются письменно.

Предѣлъ чиселъ.

Каковъ предѣлъ чиселъ, иначе сказать: до какого самаго большого числа доходитъ тотъ или другой народъ при счетѣ и вычисленіи?

Живетъ въ настоящее время 2 дикихъ племени, Жури и Каирири, которыя считаютъ только по одной рукѣ и такимъ образомъ доходятъ только до пяти. Есть еще хуже. Низшія племена Бразиліи считаютъ обыкновенно по суставамъ пальцевъ и добираются этимъ путемъ только до трехъ. Все, что выше 3-хъ, они выражаютъ общимъ словомъ „много". Цивилизованные народы древнѣйшихъ временъ, какъ то: халдеи, евреи и китайцы, не заходили въ счетѣ слишкомъ далеко. Въ халдейскихъ надписяхъ и памятникахъ нигдѣ не встрѣчается упоминанія о милліонѣ. Въ Библіи есть, правда, выраженія «тысяча тысячъ» и «тысяча разъ по десяти тысячъ», однако подъ ними никакъ нельзя разумѣть опредѣленныхъ чиселъ, скорѣй же это картинное обозначеніе какихъ-то громадныхъ, неизмѣримыхъ количествъ. Не даромъ наши предки славяне принимали десять тысячъ за „тьму", какъ за что-то туманное и неясное, до чего нельзя и досчитаться. Еще сильнѣе употреблявшееся у нихъ выраженіе „невѣдіе", въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ ариөметикахъ оно обозначало сотню тысячъ. Древнѣйшій культурный народъ Азіи, китайцы, слабые, впрочемъ, математики, считали тысячу и десять тысячъ вѣнцомъ всѣхъ чиселъ: друзьямъ они желаютъ жить тысячу лѣтъ, а императору десятокъ тысячъ. Изъ всего этого видно, что большинство народовъ древности, даже и очень образованныхъ, довольствовались въ ариөметикѣ первыми 4 разрядами и дальше тысячъ при счетѣ не шли.

Но кто особенно любилъ большія числа, такъ это индусы, горячіе поклонники ариөметики и ея творцы. Умѣнье обращаться съ громаднѣйшими числами считалось у нихъ признакомъ чрезвычайной смышленности и ставилось въ высокую заслугу. Даровитый математикъ такъ же былъ славенъ въ Индіи и достигалъ такой же популярности, какая у насъ выпадаетъ на долю только побѣдителя или поэта. Интересна легенда о нѣкоемъ индусѣ Bodhisattva, какъ онъ сталъ свататься за одну дѣвушку, и какъ отецъ невѣсты соглашался отдать ее только въ томъ случаѣ, если юноша докажетъ свое особое искусство въ письмѣ, въ единоборствѣ, въ бѣгѣ и въ ариѳметикѣ. По требованію отца, Bodisattva даетъ названія громаднымъ числамъ, кончая единицей 54-го разряда, т.-е. онъ оказывается въ состояніи прочесть число, выраженное длинной строкой въ 54 цифры, и что всего поразительнѣе, такъ это то, что онъ выговариваетъ числа не по одному способу, а по нѣсколькимъ, по 6 или 7. Въ заключеніе ему даютъ задачу: пусть бы онъ указалъ самую наименьшую долю длины, какую только можетъ онъ придумать. Онъ назвалъ и указалъ $\frac{1}{108\,470\,495\,616\,000}$ индусской мѣры длины. Онъ началъ такъ: эта доля, которую я указываю, составляетъ седьмую часть тончайшей пылинки: 7 тончайшихъ пылинокъ составляютъ одну небольшую пылинку: изъ 7 небольшихъ выходитъ такая, которую кружитъ вѣтеръ; ихъ 7 даютъ одну, пристающую къ ногѣ зайца: 7 подобныхъ послѣдней даютъ одну, пристающую къ ногѣ барана; 7 пристающихъ къ ногѣ барана образуютъ одну, пристающую къ ногѣ буйвола: 7 пылинокъ буйвола составляютъ маковое зернышко; 7 маковыхъ зернышекъ даютъ горчичное зерно, 7 горчичныхъ—ячменное, 7 ячменныхъ даютъ длину сустава пальца, изъ 12 суставовъ получаемъ пядь, изъ двухъ пядей — локоть, 4 локтя составляютъ лукъ и, наконецъ, 4000 луковъ даютъ индусскую мѣру длины, такъ наз. «yôana». Таковъ переходъ отъ этой мѣры къ самой малой долѣ и такова дробь, выраженная, по-нашему, въ трилліонныхъ частяхъ.

Знаменитые математики древней Греціи, Пиѳагоръ и Архимедъ, не такъ интересовались ариѳметикой, какъ геометріей. Ариѳметика у нихъ была не своя, а заимствованная главнымъ образомъ у индусовъ. Неудивительно поэтому, что великій математикъ Пиѳагоръ ограничивался въ своихъ вычисленіяхъ только 16-ю разрядами счетныхъ единицъ и заканчивалъ, если перевести числа на нашу систему, квадрилліонами (единица съ 15 нулями). Но Архимедъ пошелъ въ этомъ случаѣ довольно далеко. Подражая индусамъ, онъ поставилъ себѣ такую задачу: высчитать число песчинокъ во всей вселенной, даже и въ томъ предположеніи, что весь міръ состоитъ изъ песчинокъ. Архимедъ рѣшилъ задачу такъ. Пусть, говоритъ онъ, вся вселенная образуетъ шаръ съ центромъ на солнцѣ и съ радіусомъ, равнымъ разстоянію отъ солнца до земли. Пусть вся вселенная состоитъ изъ песчинокъ и притомъ изъ такихъ мелкихъ, что тысяча песчинокъ равна маковому зерну. Предположимъ, что 40 маковыхъ зеренъ, уложенныя въ рядъ, образуютъ дюймъ длины. При всѣхъ этихъ условіяхъ, по вычисленію Архимеда, песчинокъ во всей вселенной менѣе, чѣмъ сколько выражаетъ число, обозначенное единицей съ 64 нулями. Интересно, какъ же выговорить такое громадное число или какъ его представить въ наглядномъ и доступномъ видѣ? Архимедъ идетъ такимъ путемъ: 10000 простыхъ единицъ онъ называетъ миріадой. Миріада миріадъ = 100 000 000, это будетъ единица 9-го разряда. Назовемъ ее хоть группой. Группа группъ будетъ единицей 17-го разряда=10 000 000 000 000 000. Назовемъ эту группу группъ хоть массой. Тогда масса массъ составитъ единицу 33-го разряда. Назовемъ ее, пожалуй, хоть громадой. Тогда громада громадъ будетъ составлять единицу 65-го разряда и явится отвѣтомъ на задачу Архимеда *).

Подобную систему, позволяющую выражать громадныя количества, встрѣчаемъ мы въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ ариѳметикахъ (XVI—XVII в. по Р. Х.). Она носитъ названіе «числа великаго словенскаго» и представляетъ изъ себя нумерацію, развитую подробно, остроумно и своеобразно. Не безъ вліянія на эту нумерацію осталась польская ученость, которая во времена, предшествовавшія Петру Великому, питала и растила зачатки русской образованности, въ особенности же въ свѣтской ея части; польская наука заимствовала, въ свою очередь, все содержаніе и силу изъ Западной Европы, Европа у арабовъ, арабы многому научились у индусовъ. Вотъ какая длинная цѣпь переходовъ и ступеней нужна была для того, чтобы ариѳметическія знанія индусовъ сдѣлались собственностью русскихъ. И времени для этого потребовалось не мало, — цѣлыя столѣтія: что въ Индіи извѣстно было вскорѣ по Р. Х., то къ намъ въ Россію прибыло едва въ 17 столѣтіи. Вотъ таблица «числа великаго словенскаго», употреблявшаяся въ томъ случаѣ, «коли прилучался великій счетъ и пере-

*) Архимеду приписываютъ еще сочиненіе, въ которомъ идетъ рѣчь о такихъ колоссальныхъ числахъ, что если бы ихъ выразить нашими цифрами, то пришлось бы написать единицу съ 800 милліонами нулей.

чень», и содержавшая въ себѣ 50 счетныхъ единицъ: 1) единъ, 2) десять, 3) сто, 4) едина тысяча, 5) десять тысячъ, 6) сто тысячъ, 7) едина тьма, 8) десять темъ, 9) сто темъ, 10) тысяча темъ, 11) десять тысячъ темъ, 12) сто тысячъ темъ, 13) единъ легіонъ 14) десять легіоновъ, 15) сто легіоновъ, 16) тысяча легіоновъ, 17) десять тысячъ легіоновъ, 18) сто тысячъ легіоновъ, 19) тьма легіоновъ, 20) десять темъ легіоновъ, 21) сто темъ легіоновъ, 22) тысяча темъ легіоновъ, 23) десять тысячъ темъ легіоновъ, 24) сто тысячъ темъ легіоновъ, 25) единъ леодръ, 26) десять леодровъ, 27) сто леодровъ, 28) тысяча леодровъ, 29) десять тысячъ леодровъ, 30) сто тысячъ леодровъ, 31) тьма леодровъ, 32) десять темъ леодровъ, 33) сто темъ леодровъ, 34) тысяча темъ леодровъ, 35) десять тысячъ темъ леодровъ, 36) сто тысячъ темъ леодровъ, 37) единъ легіонъ леодровъ, 38) десять легіоновъ леодровъ, 39) сто легіоновъ леодровъ, 40) тысяча легіоновъ леодровъ, 41) десять тысячъ легіоновъ леодровъ, 42) сто тысячъ легіоновъ леодровъ, 43) тьма легіоновъ леодровъ, 44) десять темъ легіоновъ леодровъ, 45) сто темъ легіоновъ леодровъ, 46) тысяча темъ легіоновъ леодровъ 47) десять тысячъ темъ легіоновъ леодровъ, 48) сто тысячъ темъ легіоновъ леодровъ, 49) вранъ, 50) колода. «Сего числа нѣсть больши», прибавляютъ рукописи въ заключеніе.

Кромѣ того, у русскихъ XVI—XVII вѣка по Р. Х. была еще другая система счета, такъ сказать, обиходная, будничная. Это — «малое число». По этой системѣ единицами счета являются: единица простая, десятокъ, сотня, тысяча, тьма=10 000, легіонъ =100 000 и леодръ==1000 000.

Замѣчательно, что и средневѣковые китайскіе ученые доводятъ нумерацію до 53-го разряда. И совпаденіе предѣла, и нѣкоторые другіе историческіе факты приводятъ къ вѣроятному предположенію, что не всегда Китай былъ такъ уединенно-замкнутъ, какъ въ наши времена, и что индусская ученость, въ пору расцвѣта своей силы, т.-е. лѣтъ тысячу тому назадъ, проникла и къ китайцамъ и проявила свое дѣйствіе тамъ.

Чтобы закончить выясненіе предѣла чиселъ, мы остановимся еще немного на преданіи о той наградѣ, которую изобрѣтатель шахматной игры пожелалъ получить отъ шаха Шерама. Это преданіе свидѣтельствуетъ опять-таки о склонности индусовъ къ громаднымъ вычисленіямъ. Гласитъ оно слѣдующее. Шахъ Шерамъ такъ былъ восхищенъ только что изобрѣтенной шахматной игрой, что предложилъ изобрѣтателю назначить самому себѣ награду. Тотъ и назначилъ: «положи», говоритъ, «Шахъ, мнѣ на первую клѣтку доски 1 пшеничное зернышко, на 2-ю два, на 3-ю 4, на 4-ю 8 и т. д., на каждую послѣдующую вдвое больше, чѣмъ на предыдущую». Клѣтокъ въ доскѣ 64. Шахъ поспѣшилъ согласиться, но когда стали высчитывать количество зеренъ, то оказалось, что получается нѣчто необъятное, и что столько зеренъ нечего и думать набрать, хотя бы начать собирать ихъ со всей земли. Отвѣтъ такой: 18 446 744 073 709 551 615.

Счетные приборы.

Всякій отдѣльный человѣкъ и всякій отдѣльный народъ на первыхъ ступеняхъ своего развитія бываетъ склоненъ къ предметному счету. Какъ дѣтямъ, такъ и дикарямъ свойственно начинать счетъ съ пальцевъ. Отъ пальцевъ они переходятъ робкими попытками и съ большой нерѣшительностью къ счету на другихъ предметахъ, обыкновенно на близкихъ имъ и обиходныхъ, напр., на черточкахъ, зарубкахъ, крестикахъ, костяшкахъ и т. п. Они еще очень далеки въ этомъ случаѣ отъ устнаго счета и отъ письменныхъ вычисленій. Продолжая развивать свою привычку къ наглядному счету, человѣкъ доходитъ до сложныхъ системъ, которыя онъ проявляетъ въ особенныхъ счетныхъ приборахъ и аппаратахъ. Одни только индусы, у которыхъ наука восходитъ къ такой же сѣдой древности и къ такимъ же необъятнымъ глубинамъ прошедшихъ вѣковъ, какъ у египтянъ и китайцевъ, и у которыхъ образованіе начало развиваться за тысячи лѣтъ до Р. Х.,—одни они успѣли освободиться отъ помощи предметовъ во время счета и занялись чисто-умственнымъ, преимущественно устнымъ, счетомъ. У остальныхъ же народовъ, какъ образованныхъ, такъ и мало развитыхъ, мы встрѣчаемъ множество наглядныхъ пособій.

Укажемъ прежде всего на счетъ по пальцамъ и притомъ не на простой способъ постепеннаго загибанія пальцевъ, а на оригинальные пріемы, изобрѣтенные по большей части римлянами.

Римляне были большіе любители всевозможныхъ вычисленія на пальцахъ. Между прочимъ, путемъ разгибанія и загибанія пальцевъ, а также путемъ вытягиванія и складыванія рукъ, они умѣли выражать числа отъ 1 до милліона. При этомъ 3 пальца лѣвой руки, начиная съ мизинца, служили у нихъ въ различныхъ комбинаціяхъ для простыхъ единицъ, остальные пальцы лѣвой руки—для десятковъ, большой и указательный пальцы правой руки для сотенъ, а остальные для тысячъ. Чтобы выразить, напр., простую единицу, они загибали мизинецъ, чтобы выразить 2, пригибали 4-й и 5-й палецъ къ ладони, для 3-хъ 3-й палецъ; число 90, напр., обозначалось указательнымъ пальцемъ, пригнутымъ къ ладони; для обозначенія десятковъ тысячъ они клали лѣвую руку на грудь, бедро, для сотенъ тысячъ пользовались такимъ же образомъ правой рукой; складываніе рукъ крестъ-накрестъ соотвѣтствовало милліону.

Римляне не только могли замѣчать на пальцахъ большія числа, но они умѣли производить при помощи пальцевъ нѣкоторыя дѣйствія. И сейчасъ еще потомки римлянъ, румыны и южные французы, въ состояніи быстро и искусно продѣлывать на пальцахъ таблицу умноженія.

Положимъ, дано умножить 6 на 8; тогда протягиваемъ на одной рукѣ 1 палецъ, т.-е. ровно столько, насколько первый множитель больше пяти, а на второй рукѣ протягиваемъ 3 пальца, потому что, согласно такому же расчету, 8 больше 5-ти на три; количество протянутыхъ пальцевъ складываемъ, и это будетъ число десятковъ—4; количества же пригнутыхъ пальцевъ перемножаемъ: $4\times2=8$, тогда получимъ единицы произведенія, 4 дес.$+8=48$.

Еще примѣръ: 8×9; такъ какъ 8 больше 5-ти на 3, а 9 на 4, то надо протянуть на первой рукѣ 3 пальца, а на второй—4, тогда останется согнутыхъ пальцевъ на первой рукѣ 2, на второй—1; теперь мы складываемъ количество протянутыхъ: $3+4=7$, и перемножаемъ количества согнутыхъ: $1\times2=2$, отвѣтъ 72.

На чемъ же основанъ этотъ остроумный и быстрый пріемъ? Имъ такъ любили пользоваться школьники, особенно среднихъ вѣковъ, когда имъ не давалась многотрудная таблица умноженія. Основаніе его лучше всего можно выяснить алгебраической формулой, и для тѣхъ, кто владѣетъ алгеброй, мы ее сообщаемъ. Она имѣетъ видъ тождества: $x.y=(x-5+y-5).10+[5-(x-5)].[5-(y-5)]$. Изъ формулы можно видѣть, что она примѣнима только для тѣхъ случаевъ, когда множители больше 5-ти.

Пальцевымъ счетомъ можно воспользоваться также и при умноженіи двузначныхъ чиселъ, но только такихъ, чтобы они были не выше 20-ти. Чтобы показать это на примѣрѣ, умножимъ этимъ способомъ 13 на 14: для этого 3 да 4 складываемъ: будетъ 7, столько десятковъ; эти же числа, т.-е. 3 и 4, перемножаемъ, будетъ 12, столько единицъ; а за то, что множители принадлежатъ ко 2-му десятку, надо къ полученнымъ отвѣтамъ добавить еще сотню; тогда всего получится: $100+70+12=182$—отвѣтъ совершенно вѣрный. Кто знаетъ алгебру, тотъ безъ труда составитъ формулу для объясненія этого пріема: $(10+a).(10+b)=100+ab+10.(a+b)$.

Покончивши съ вопросомъ о самомъ главномъ, близкомъ и употребительномъ пособіи, о пальцахъ, мы переходимъ къ тому разряду пособій, который нашелъ себѣ представителя въ русскихъ торговыхъ счетахъ. Русскіе счеты! Какъ они распространены въ народѣ, среди лавочниковъ, мелкихъ служащихъ, въ конторахъ! Ихъ издавна любитъ русское торговое сословіе. Это дало поводъ думать нѣкоторымъ, что счеты изобрѣтеніе чисто русское, наше родное, національное и самобытное. Ничуть: предположеніе совершенно напрасное, такъ какъ оно основано на незнаніи и недоразумѣніи: приборы, похожіе на счеты, мы встрѣчаемъ у многихъ народовъ, въ особенности у народовъ древняго міра, напр., у римлянъ, грековъ, китайцевъ, халдеевъ и у всѣхъ народовъ, которые приходили съ ними въ соприкосновеніе. Да и какъ не быть счетамъ, когда происхожденіе ихъ такъ просто, ясно и всеобще. На счетахъ имѣются шарики: естественно и удобно для всякаго народа, потому что потребность наглядности есть у всѣхъ, а что-нибудь лучше шариковъ трудно и придумать, по крайней мѣрѣ заостренные, неотшлифованные предметы не такъ удобны для рукъ, какъ круглые: далѣе, шарики надѣваются на проволоки, но они могли бы надѣваться на стержни и шнуры или могли-бы класться въ желобки: цѣль, очевидно, та, чтобы они не разсыпались; это мы наблюдаемъ также у многихъ народовъ. Наконецъ, этотъ счетный приборъ содержитъ не одинъ рядъ костяшекъ, а нѣсколько: это уже болѣе высокая ступень счета, когда народъ имѣетъ нѣсколько разрядовъ единицъ, какъ простыхъ, такъ и сложныхъ: проволоки, шнуры и колонны для различныхъ разрядовъ могли бы располагаться какъ горизонтально, такъ и вертикально: у насъ въ русскихъ счетахъ проволоки расположены горизонтально, у римлянъ же колонны для шариковъ располагались вертикальными рядами.

Русскимъ торговымъ счетамъ можно указать ихъ родоначальника и предшественника въ китайскомъ сванъ-панѣ. Изобрѣтеніе его относится къ вѣкамъ глубокой древности, откуда, впрочемъ, восходитъ и вся китайская наука и искусство. Надо полагать, что сванъ-панъ получилъ свое начало не сразу, а преобразовался изъ зачаточнаго, грубаго прибора постепенно, многими поправками и улучшеніями, пока не дошелъ до своего настоящаго вида. Признакомъ его древности служитъ то, что онъ содержитъ въ себѣ смѣсь пятеричной системы съ десятичной, слѣдовательно, онъ изобрѣтенъ тогда, когда народъ еще пользовался пятеричной системой и не перешелъ къ чистой десятичной.

Объяснимъ устройство сванъ-пана. Представьте себѣ деревянную раму, въ родѣ той, какая имѣется въ русскихъ торговыхъ счетахъ; поперекъ этой рамы горизонтальными рядами натянуты шнуры, вмѣсто нашихъ мѣдныхъ проволокъ. На каждомъ шнурѣ только 7 шариковъ, а не 10. Какъ же управляться съ 7-ю шариками и почему именно 7, а не другое число? А вотъ какъ: вдоль всѣхъ счетовъ, вертикально сверху внизъ, пересѣкая шнуры, идетъ перегородка, сквозь которую шнуры и продѣваются. При этомъ по одну сторону перегородки остается шариковъ пятокъ, а по другую пара. Пятокъ назначается для отдѣльныхъ единицъ и съ нимъ ведется дѣло такъ же, какъ у насъ съ косточками на торговыхъ счетахъ. Что же касается пары, то назначеніе ея сложнѣе: каждая изъ составляющихъ ее косточекъ равна по значенію 5 единицамъ соотвѣтствующаго разряда. Поэтому какъ только мы наберемъ 5 косточекъ на нижней проволокѣ, то мы этотъ пятокъ должны сбросить и замѣнить одной изъ тѣхъ косточекъ, которыя входятъ въ составъ пары. Въ свою очередь, какъ только наберется этихъ пятерныхъ косточекъ двѣ, такъ онѣ сбрасываются и замѣняются одной простой косточкой на слѣдующей высшей проволокѣ. Изъ этого мы видимъ, что на нижней линіи кладутся единицы и пятки, на 2-й десятки и полсотни, на 3-ей сотни и полтысячи и т. д. Всего въ сванъ-панѣ 10 линій, т.-е. шнуровъ.

Отдѣльныхъ линій для долей въ немъ вовсе нѣтъ, не такъ, какъ въ русскихъ счетахъ.

Въ греческомъ и римскомъ мірѣ былъ свой замѣститель сванъ-пана и русскихъ счетовъ. Онъ назывался абакомъ. Слово «абакъ» происхожденія еврейскаго и значитъ *пыль*. И это потому, что римляне и греки пользовались досками, на которыхъ былъ насыпанъ мелкій песокъ; на нихъ расчерчивался рядъ вертикальныхъ параллельныхъ линій: между начерченными линіями въ промежуткахъ само собой являлся рядъ колоннъ или гладкихъ пространствъ, изъ которыхъ крайнее назначено было для простыхъ единицъ, второе (обыкновенно слѣва) для десятковъ, третье для сотенъ и т. д. Какъ же обозначить на такомъ абакѣ число единицъ, десятковъ, сотенъ и т. д.? Для этого былъ не одинъ способъ, а нѣсколько, при чемъ въ разныя времена и подъ вліяніемъ тѣхъ или другихъ математиковъ попеременно выдвигался на первый планъ то тотъ способъ, то другой: во-первыхъ, на колонны клали нужное количество костяшекъ или камешковъ, или же на нихъ чертили столько черточекъ, крестиковъ или кружковъ, сколько хотѣли обозначить единицъ; это самый немудрый, примитивный способъ. Позднѣе, съ Пиѳагора (въ VI вѣкѣ до Р. Хр.) начали пользоваться вторымъ пріемомъ, именно въ колоннахъ на пескѣ стали писать не крестики и черточки, а прямо цифры, и, наконецъ, въ замѣну этого пріема явился третій: стали употреблять костяшки или „марки", съ награвированными цифрами, такъ что вмѣсто письма въ колоннахъ на пескѣ начали класть костяшки съ цифрами; кромѣ того, вмѣсто доски съ насыпаннымъ пескомъ употребляли иногда поверхность гладкую изъ камня, дерева или металла, на ней графили рядъ колоннъ, въ которыя и клали марки. Чисто-римскій абакъ, въ отличіе отъ абака греческаго и отъ позднѣйшихъ видовъ этого же инструмента, былъ съ такими двумя подробностями: Во-первыхъ, сбоку у него имѣлись небольшія колонки для долей: половинъ, третей и четвертей или же унцій, т.-е. двѣнадцатыхъ долей: потребность въ вычисленіяхъ съ дробями давала себя чувствовать въ обширной и практически-разносторонней дѣятельности римлянъ: во-вторыхъ, такъ какъ римляне дольше всѣхъ народовъ примѣшивали къ десятичной системѣ пятеричную, то ихъ абакъ, подобно своему родоначальнику сванъ-пану, былъ примѣненъ къ счету пятками; надо замѣтить, что гордый Римъ, весь міръ приведшій подъ свое владычество и давшій образцы устройства государства, былъ не силенъ по части истинной науки и больше занимался вопросами житейской практики: плохіе математики и только свѣдущіе землемѣры, римляне не могли представить себѣ ясно всѣхъ преимуществъ точнаго счета десятками безъ всякой примѣси пятковъ, и лишь ученый представитель позднѣйшей римской образованности Боэцій, жившій въ VI столѣтіи по Р. Хр., отбросилъ, наконецъ, добавочныя грани для пятковъ, и у него мы видимъ чистый счетъ десятками. Абакъ Боэція содержитъ въ правой колоннѣ единицы, въ сосѣдней съ ней десятки, въ слѣдующей сотни и т. д.; если какой-нибудь разрядъ отсутствуетъ, то та колонна остается незаполненной. Какъ близко отъ такого способа обозначенія до нашего порядка записыванія чиселъ! Стоитъ стереть черты колоннъ и обозначить какъ-нибудь мѣста пропущенныхъ разрядовъ, вотъ и наша система. Весьма возможно, что въ историческомъ развитіи такъ именно и совершалось дѣло, т.-е. когда въ данномъ числѣ какой-нибудь разрядъ отсутствовалъ, и та колонна, слѣдовательно, являлась незаполненной, то стирали всѣ колонны, кромѣ нея, ее же выражали въ видѣ квадрата, незаполненнаго цифрой: отсюда одинъ шагъ къ тому, чтобъ вмѣсто неудобнаго квадрата ввести кружокъ, который чертится гораздо легче: кружокъ этотъ и есть нашъ нуль. Но все-таки введеніе нуля никоимъ образомъ не можетъ считаться заслугой римлянъ: оно принадлежитъ индусамъ.

Въ XV столѣтіи по Р. Хр. абакъ, почти забытый со временъ Боэція и замѣненный письменными вычисленіями, вновь выступаетъ на первый планъ. Его выводитъ изъ забвенія кипучая, горячая пора открытій, изобрѣтеній, развитія торговли и мореплаванія. Въ XV—XVI столѣтіи торговля западной Европы сильно оживилась, явилась потребность въ конторахъ, банкахъ и т. д., и вотъ купцы и всѣ коммерческіе люди стали усиленно примѣнять абакъ, какъ инструментъ сравнительно простой и легкій. При этомъ для удобства доску абака они клали на спеціальную подставку или скамейку и въ этомъ видѣ называли абакъ счетной скамьей, а такъ какъ по-нѣмецки скамья называется «bank» («банкъ»), то намъ легко понять, что значитъ «банкъ», «банкиръ».

Отголоски абака проникли въ русскую ариѳметическую литературу

XVII вѣка, подъ именемъ счета «костьми« или «пѣнязи». Цѣль этого пособія была та, чтобы «великій счетъ считати». Нашъ абакъ отличался только одной особенностью, именно онъ разлиневывался поперекъ на нѣсколько частей, и въ немъ отводились спеціальныя мѣста для слагаемыхъ и суммы. Счетъ «костьми» употреблялся, когда нужно было «класти костьми сошную кладь», т.-е. высчитывать земельные налоги, «а вытная и хлѣбная потому жъ», т.-е. болѣе мелкія подати. Кромѣ единицъ, десятковъ и т. д. при счетѣ костьми употреблялись доли: трети, полутрети, половино-полутрети, малыя трети (24-я), чети, т.-е. четверти, получети, половино-получети, малыя чети (32-я доли). Для всѣхъ этихъ дробей были внизу доски особыя мѣста. Что счетъ костьми происхожденія иноземнаго, на это, между прочимъ, указываетъ и присутствіе пятковъ, полсотенъ и т. д., какъ въ сванъпанѣ и старинномъ римскомъ абакѣ.

Скажемъ еще нѣсколько словъ о русскихъ торговыхъ счетахъ. Первоначальная ихъ форма на Руси такъ назыв. «дощаный счетъ», т.-е. доска или рама съ «четками» (шариками), надѣтыми на шнуры или веревки. Дощаный счетъ, подобно нынѣшнимъ торговымъ счетамъ, употреблялся въ народѣ часто: «имъ всякій торговый счетъ сочтетъ и сошной и помѣрной и вѣсчей и денежной всякой счетъ по всякимъ статьямъ и въ доляхъ». Русскіе торговые счеты, или, какъ называютъ ихъ нѣмцы, «русская счетная машина», сдѣлались извѣстными за границей очень недавно и по такому случаю. Французскій офицеръ Понселе въ 1812 году былъ взятъ въ плѣнъ и поселенъ въ Саратовѣ; послѣ компаніи онъ вернулся на родину въ Мецъ и ознакомилъ тамъ соотечественниковъ съ оригинальнымъ и удобнымъ приборомъ, который онъ захватилъ съ собой изъ Саратова. Съ тѣхъ поръ счеты распространились въ иностранныхъ школахъ въ видѣ наглядного пособія, но далеко не такъ повсемѣстно, какъ въ нашихъ.

Цифры различныхъ народовъ.

Немного есть наукъ, которыя свое начало вели бы съ такихъ древнихъ временъ, какъ ариѳметика. И среди этихъ немногихъ своихъ спутницъ ариѳметика является наукой самой отвлеченной. Но если ужъ теперь, несмотря на то, что цивилизація и общее развитіе значительно проникли въ массу народа, всякое отвлеченное мышленіе все же считается чѣмъ-то сухимъ и труднымъ, то тѣмъ болѣе во времена давно прошедшія отвлеченное знаніе нуждалось обязательно во внѣшнемъ проявленіи. Цифры и служатъ такимъ проявленіемъ. Онѣ всеобщи и такъ же древни, какъ древни крайніе зачатки ариѳметики. Такъ, цифры у египтянъ мы видимъ за 2200 лѣтъ до Р. Хр. въ папирусѣ Ринда, у халдеевъ за 2300 лѣтъ до Р. Х. въ табличкахъ Сенкере и у Китайцевъ за 2637 лѣтъ до Р. Х. въ «Кіучангѣ», составленномъ ученымъ авторомъ Тшинъ-кіу-чау. Много есть разныхъ сортовъ цифръ: они отличаются другъ отъ друга и происхожденіемъ, и начертаніемъ, въ зависимости отъ того, когда они получили начало и у какого именно народа.

Навѣрное, читатель, вамъ приходилось не разъ замѣчать, что малые ребята съ особенною охотою рисуютъ дома, людей, животныхъ, т.-е. все то, что прямо претъ глазами, и лишь потомъ, впослѣдствіи они берутся за условные рисунки, т.-е. значки, планы и чертежи. Такъ точно и народы древности предпочитали имѣть цифры въ видѣ рисунковъ тѣхъ предметовъ, которые у нихъ передъ глазами. Особенно замѣтна эта склонность у древнихъ египтянъ, хотя и у другихъ народовъ мы можемъ указать подобные слѣды. Это письмо носитъ названіе іероглифическаго: напр., чертежъ шеста или кола обозначалъ собою единицу: десятокъ означался фигурою 2-хъ соединенныхъ рукъ, такъ какъ на 2 рукахъ бываетъ 10 пальцевъ; символомъ сотни считался свернутый пальмовый листъ, такъ какъ съ его развитіемъ выходитъ изъ него много листовъ, можетъ быть до 100; тысяча рисовалась въ видѣ цвѣтка лотоса, который знаменовалъ собой обиліе; цифрой, которая обозначала 10000, было изображеніе лягушки, такъ какъ лягушки при разливахъ Нила являлись въ неисчислимомъ количествѣ, многими тысячами. Картиной милліона была фигура изумленнаго человѣка.

Такими іероглифами пользовался Египетъ для выраженія всѣхъ чиселъ. Подобная система была и у халдеевъ. У римлянъ цифра V напоминаетъ своей формой кисть руки. Но, очевидно, писать при помощи рисунковъ крайне медлительно и неудобно, въ особенности же потому, что каждый изъ рисунковъ необходимо было повторять по многу разъ. Такъ, чтобы выразить число хоть 30270, египтянинъ

3 раза рисовалъ лягушку, 2 раза листъ и 7 разъ сложенныя руки. Іероглифы надо было упростить, снабдить ихъ легкой формой и примѣнимостью къ письму. Вмѣсто фигуръ стали чертить линіи облики, нѣчто въ родѣ условныхъ знаковъ. Такъ получились цифры. Кромѣ того, писать одинъ и тотъ же знакъ по многу разъ невыгодно и долго, поэтому египтяне придумали для чиселъ 2, 3, 4. 9 свои особые значки, которые давали имъ возможность избѣгать длиннаго и утомительнаго повторенія цифры 1. Что же касается 5, 6, 7, 8, то эти цифры у египтянъ были составлены изъ 2, 3, 4.

Слѣды письма іероглифами, какъ сказано ужъ выше, мы видимъ у халдеевъ. Но и они оставили эту систему и выработали вмѣсто нея новую, очень послѣдовательную и простую, такъ называемое клинообразное письмо. Чтобъ обозначить единицу, халдеи рисовали вертикальную черту съ заостреннымъ нижнимъ краемъ и толстымъ расщепленнымъ верхнимъ. Десятокъ означался такою же чертой, но только въ положеніи горизонтальномъ и съ острымъ краемъ, обращеннымъ влѣво. Для выраженія нѣсколькихъ единицъ халдеи повторяли столько разъ знакъ единицы, сколько ихъ содержалось въ данномъ числѣ. Такъ, напр., чтобы выразить 7 единицъ, они писали 7 разъ знакъ единицы. Такимъ же образомъ они писали и десятки. Сотню они обозначали помощью 2 чертъ, горизонтальной вмѣстѣ съ вертикальной. Для чиселъ, состоящихъ изъ полныхъ сотенъ, порядокъ видоизмѣнялся: именно, халдеи брали знакъ сотни и при немъ писали столько разъ единицу, сколько сотенъ въ заданномъ числѣ. Для тысячи халдеи не имѣли особенной цифры, и они обозначали тысячу, какъ десять сотенъ. И такъ, халдейская система цифръ, равно какъ и египетская, основаны на непосредственной наглядности, и отъ нея уже онѣ переходятъ къ условнымъ знакамъ.

Еще такого же происхожденія мы видимъ цифры у китайцевъ. Въ первоначальной своей формѣ онѣ напоминаютъ картины тѣхъ шнуровъ и косточекъ, которые употреблялись при наглядномъ счетѣ. Впослѣдствіи цифры китайцевъ сильно измѣнились и приняли нѣсколько видовъ. У нихъ есть разныя цифры: древне-китайскія, торговыя, научныя и для правительственныхъ актовъ. Цифры древне-китайскія очень фигурны и замысловаты и весьма возможно, что онѣ явились измѣненіемъ начальныхъ іероглифовъ: онѣ писались на листкахъ не въ строчку, а вертикальнымъ столбикомъ, располагаясь сверху внизъ. Наоборотъ, цифры торговыя писались горизонтальными строками и шли слѣва направо: при этомъ числа разлагались на разряды, такъ что разрядъ писался за разрядомъ. Чтобы прочесть число, китайцы прямо говорили тѣ слова, какія соотвѣтствуютъ написанному ряду цифръ; согласно ихъ произношенію, тридцать=три десять, тринадцать=десять три, девяносто =девять десять.

Итакъ, у египтянъ, халдеевъ и китайцевъ мы видимъ цифры древнѣйшаго происхожденія, которыя напоминаютъ собою іероглифы, или картины тѣхъ предметовъ, которые стоятъ въ связи съ даннымъ числомъ. Другимъ основнымъ корнемъ, давшимъ начало цифрамъ, являются числительныя имена. Это ужъ цифры болѣе позднѣйшія, такъ какъ для ихъ изображенія необходимо было развиться алфавиту, грамотности, потребности въ письмѣ и достаточному искусству письменнаго изложенія. У нѣкоторыхъ народовъ, какъ, напр., у финикіянъ, нерѣдко выписывались числительныя имена сполна, черезъ посредство буквъ и словъ: финикіяне прямо записывали числа, согласно ихъ произношенію, словами, а не пользовались особыми значками—цифрами. Иногда такой же способъ примѣняли и греки, но особенно его любили арабы. Существуетъ цѣлый учебникъ по ариѳметикѣ араба Алькархи (въ 11 ст. по Р. Х.), гдѣ нѣтъ ни одной цифры и всѣ вычисленія, даже довольно сложныя, выполнены словесно.

Но очевидно, что подобное выписываніе числительныхъ именъ крайне неудобно и утомительно. Въ силу этого, числительныя имена стали подвергаться сокращенію, и цифрами стали считаться начальныя буквы числительныхъ именъ. Примѣровъ этому мы видимъ много у грековъ и у римлянъ, у индусовъ и у арабовъ (въ ихъ позднѣйшихъ цифрахъ). Греческія слова „пять" (πεντε), десять (δεκα), тысяча (χιλιοι), десять тысячъ (μυριοι) начинались съ буквъ π, δ, χ, μ, поэтому именно такія буквы являлись у грековъ знаками для чиселъ 5, 10, 1000, 10000, такъ что, согласно первоначальному греческому обозначенію, число пять имѣло цифру π, десять δ, тысяча χ, и, наконецъ, десять тысячъ μ. Подобный счетъ описанъ византійскимъ грамматикомъ Геродіаномъ, и этотъ сортъ греческихъ цифръ называется геродіановыми цифрами. Подобной же системой воспользовались и арабы, когда они, наконецъ, поняли, что полностью писать числительныя имена довольно затруднительно, они тоже стали писать только начальныя буквы числительныхъ именъ.

И наконецъ, послѣдней стадіей развитія, хотя и близкой къ нашимъ временамъ, но вовсе неудобной и потому оставленной, надо признать такой порядокъ, когда замѣной цифръ служили буквы въ послѣдовательности алфавита. Такъ напр., греческій алфавитъ содержитъ по порядку буквы: α, β, γ, δ, ε, въ виду этого и числа обозначались: единица—α, два—β, три—γ, четыре—δ, пять—ε. Греки придумали обозначать такимъ образомъ приблизительно со временъ Рождества Христова, а до этого они прибѣгали къ геродіановымъ цифрамъ. Вслѣдствіе этого буква δ стала обозначать уже не десять, какъ начальная буква греческаго слова «δεκα», что значитъ десять, но она стала выражать четыре, какъ 4-я буква алфавита. Какое же удобство въ этихъ позднѣйшихъ цифрахъ сравнительно съ тѣми, которыя указалъ Геродіанъ? Ариѳметически нѣтъ совершенно никакого, и пользы отъ замѣны однихъ значковъ другими не представляется никакой; виной такой замѣны явились, вѣроятно, переписчики, которымъ слишкомъ трудно было помнить буквы вразбросъ и въ безпорядкѣ: они и предпочли расположить ихъ въ порядкѣ. Подобную же систему мы видимъ у славянъ и у евреевъ. Несомнѣнно, она заимствована отъ грековъ.

Повторимъ вкратцѣ еще разъ, что цифры всѣхъ народовъ и временъ распредѣляются на три разряда: 1) цифры, получившія начало отъ іероглифовъ и обратившіяся въ условные знаки; 2) цифры, образовавшіяся изъ буквъ алфавита и представляющія собой начальныя буквы числительныхъ именъ, и 3) цифры въ порядкѣ буквъ алфавита. Вторая категорія цифръ тоже измѣнилась, подобно первой, въ нѣкоторыхъ случаяхъ до неузнаваемости, такъ что изъ буквъ образовались условные знаки.

Теперь мы сообщимъ нѣкоторыя подробности о цифрахъ отдѣльныхъ народовъ*).

Египтяне. Они были образованнымъ народомъ уже за 4000 лѣтъ до Р. Х. Періодическіе разливы Нила рано побудили ихъ заниматься землемѣріемъ и ариѳметикой, такъ какъ каждую весну приходилось

*) Въ концѣ книги приложена таблица цифръ.

имъ снова размѣрять, расчислять и дѣлить поля, затянутыя иломъ могучей рѣки. Въ 1872 году въ тайникахъ одной изъ многочисленныхъ египетскихъ пирамидъ нашли свертокъ пергамента, такъ наз. папирусъ „Риндъ", въ которомъ разобрали рукопись ариѳметическаго содержанія. Авторъ ея нѣкто египтянинъ Амесъ, жившій во времена фараона Аменемы (2221—2179 г. до Р. Х.). Изъ рукописи можно усмотрѣть, что автору доступны были довольно сложныя задачи замысловатаго характера не только въ цѣлыхъ числахъ, но и съ дробями.

У египтянъ было три системы письма: а) іероглифическая, о которой упомянуто выше, в) іератическая, или письмо жрецовъ, и с) простонародная. *Письмо іератическое является ничѣмъ инымъ, какъ* упрощеніемъ іероглифовъ, и въ этомъ смыслѣ его можно считать нормальнымъ переходомъ къ цифрамъ. Пользуясь знаками единицы, десятка, сотни, тысячи, египтяне ихъ повторяли столько разъ, сколько хотѣли обозначить единицъ, десятковъ и т. д.; но выше 1000 въ іератическомъ письмѣ они вводили умноженіе; такъ, чтобы обозначить 10000, они писали рядомъ 10 и 1000. Письмо простонародное преподавалось въ школахъ и примѣнялось въ обиходной жизни, въ торговлѣ, письмахъ, въ гражданскихъ документахъ. Оно имѣло, въ свою очередь, не мало разныхъ видовъ; одинъ изъ нихъ нами показанъ въ приложеніи 3-мъ. Когда египтяне имѣли дѣло съ большими числами, то высшіе разряды они писали слѣва, а низшіе направо, т.-е. точь въ точь, какъ мы.

Финикіяне. Они были моряками и купцами древняго міра. Имъ приписывается изобрѣтеніе алфавита и успѣшное развитіе ариѳметическихъ знаній. Алфавитъ финикіянъ состоялъ изъ 22 буквъ, похожихъ на египетскіе іероглифы. Служили-ль эти буквы также и для обозначенія чиселъ, на это нѣтъ никакихъ указаній. Напротивъ того, несомнѣнно, что финикіяне или писали сполна слова, выражающія числа, или же пользовались особыми, спеціальными цифрами. Изъ этихъ цифръ и составлялись обозначенія чиселъ, при чемъ рядомъ стоящія цифры иногда являлись множителями другъ друга, иногда же онѣ подлежали сложенію. Числа отъ 1 до 9 обозначались соотвѣтственнымъ количествомъ вертикальныхъ черточекъ. Горизонтальная черта или уголъ, обращенный отверстіемъ внизъ, обозначали число 10.

Налѣво (но не направо, какъ написали бы мы) отъ этого знака располагали 1, 2, 3 и т. д. вертикальныхъ черты, для обозначенія чиселъ отъ 11 до 19. Такъ, напр., « —» обозначало четырнадцать. Чтобы обозначить два десятка, финикіяне писали 2 параллельныхъ черты, которыя лежали горизонтально. Для 100 былъ тоже особый знакъ, именно I<I.

Изъ Тира и Сидона, древнихъ финикійскихъ городовъ, расположенныхъ на берегу Средиземнаго моря, центровъ тогдашней торговли процвѣтавшихъ съ XIV до VIII вѣка до Р. Х., распространилось счетное искусство по финикійскимъ колоніямъ, которыя были разсѣяны по берегу сѣверной Африки и южнымъ полуостровамъ Европы.

Халдеи, смѣшавшіеся съ вавилонянами и подчинившіе ихъ себѣ, жили на южномъ теченіи рѣкъ Тигра и Евфрата. Это сосѣди и счастливые противники іудеевъ ветхаго завѣта. Культура ихъ принадлежитъ къ древнѣйшимъ: она началась болѣе, чѣмъ за 3000 лѣтъ до Р. Х., и пришла въ упадокъ за 500 лѣтъ до Р. Х. Халдеи употребляли для письма нѣчто въ родѣ грифелей, съ расщепленными концами, поэтому-то мы и видимъ у нихъ такъ называемое клинообразное письмо. Цифры халдеевъ приведены выше и представлены подробно въ приложеніи 4-мъ, въ концѣ книги. Ихъ можно хорошо установить, благодаря счастливой находкѣ, которую удалось сдѣлать въ развалинахъ древняго знаменитаго города Ниневіи. Тамъ подъ грудой мусора, пыли и пепла археологи открыли цѣлую сохранившуюся залу, по нашему сказать, библіотеку, устроенную по приказанію царя Сарданапала за 7 столѣтій до Р. Х. Это была публичная библіотека. Вотъ еще когда и вотъ еще въ какихъ странахъ открывались публичныя библіотеки! Но книгъ въ ней не было, а были цѣлые ряды тонкихъ глиняныхъ плитокъ, обожженныхъ и прочныхъ, расписанныхъ разными красками: это нарисованы буквы, фразы и цѣлыя сочиненія. Есть среди нихъ и сочиненія ариѳметическаго содержанія.

Обширная торговля, вмѣстѣ съ развитіемъ ремеслъ, заставила халдеевъ заняться практическими вычисленіями; этимъ любознательный народъ не удовольствовался и перешелъ къ теоретическимъ вопросамъ ариѳметики. Мало того, халдеи стали искать какихъ-то скрытыхъ, таинственныхъ свойствъ чиселъ, стали гадать на числахъ, волховать, предсказывать; цифрамъ придавался смыслъ символическій, и ими угадывали будущее. Какъ это бываетъ вездѣ и всегда, легковѣрные люди создали халдеямъ репутацію искусныхъ гадальщиковъ. Въ 139 г. до Р. Х. они были изгнаны изъ Рима за волшебство. Но слава ихъ и вліяніе были замѣтны еще въ средніе вѣка въ Западной Европѣ, такъ что имъ приписываютъ особыя кабалистическія цифры, употреблявшіяся въ астрологіи (см. 7-е приложеніе).

Греки. Древнѣйшія цифры грековъ мы указали выше. Позднѣйшими цифрами, примѣрно за 100 лѣтъ до Р. Х., стали служить буквы алфавита въ ихъ нормальномъ порядкѣ. Единицы, десятки и сотни обозначаются по этой системѣ такъ: 1=α, 2=β, 3=γ, 4=δ, 5=ε, 6=ς, 7=ζ, 8=η, 9=θ, 10=ι, 20=κ, 30=λ, 40=μ, 50=ν, 60=ξ, 70=ο, 80=π, 90=ϟ, 100=ρ, 200=σ, 300=τ, 400=υ, 500=φ, 600=χ, 700=ψ, 800=ω, 900=ϡ. Тутъ, какъ видно, всего цифръ 27, а буквъ у грековъ въ алфавитѣ имѣется только 24; поэтому пришлось добавить къ нимъ еще 3 буквы старинныхъ, давно уже вышедшихъ изъ практики, такъ наз. vâv, koppa и sampi, для обозначенія 6, 90 и 900.

Чтобы отличить число отъ слова, греки проводили обыкновенно надъ цифрами черту, такъ, напр., ιε=15, ρκβ=122. Для обозначенія тысячъ они пользовались опять 9-ю первыми знаками, но подъ ними проводили маленькую вертикальную черту, напр., ͵α=1000, ͵β=2000, ͵γ=3000, ͵αφοε=1575, ͵εσπ=5380, ͵θωμγ=9843, ͵γχνδ=3654. Десятокъ тысячъ составляетъ новую употребительную единицу счета - миріаду. Греки любили пользоваться миріадами и примѣняли ихъ съ такою же охотой, съ какой мы примѣняемъ тысячи и милліоны; можно сказать, что въ греческомъ счисленіи классъ состоялъ изъ 4 разрядовъ, а не изъ 3-хъ, какъ въ нашемъ, такъ что при выговариваніи большихъ чиселъ они прежде всего указывали миріады, а послѣ нихъ и тысячи и остальные всѣ разряды. Знакъ миріады былъ М или Мυ. Двѣ миріады обозначались черезъ βМ.

Согласно этому Мιδ͵αχπ=141680. Миріада миріадъ, по нашему сто милліоновъ, обозначалась черезъ Мβ. Миріада въ кубѣ, иначе сказать трилліонъ, писалась Мγ. Отдѣльныя же миріады раздѣлялись точками, поэтому: Мγ. νς Мβ. ρε, Мα. ͵βω = 56010528000000. Какъ видно, цифры здѣсь располагаются отъ лѣвой руки къ правой, но это было не всегда, и такой порядокъ не считался обязательнымъ: можно было писать отъ правой руки къ лѣвой: въ Сициліи и Малой Азіи даже и выговариваніе чиселъ происходило отъ низшаго разряда къ высшему, такъ что сперва произносились единицы, затѣмъ десятки, сотни, тысячи и высшіе разряды.

Буквы—цифры гораздо менѣе удобны, чѣмъ выше упомянутые знаки Геродіана. Внося немало сбивчивости при письмѣ, онѣ, кромѣ того, мѣшаютъ производству дѣйствій, такъ какъ при нихъ надо въ отдѣльности учиться, какъ вычислять съ простыми единицами, въ отдѣльности съ десятками и съ прочими разрядами: нѣтъ аналогіи и мало сходства въ вычисленіяхъ съ отдѣльными разрядами.

Евреи. Они употребляли вмѣсто цифръ буквы алфавита. Очевидно, они это сдѣлали подъ вліяніемъ греческихъ ученыхъ, жившихъ въ Александріи, въ Египтѣ. Точно сказать нельзя, когда именно евреи перешли къ такой системѣ цифръ: но, вѣроятно, это случилось незадолго до Р. X., по крайней мѣрѣ на еврейскихъ монетахъ такія цифры встрѣчаются не ранѣе 137 г. до Р. X.

Числа отъ 1 до 9 выражались у евреевъ первыми 9-ю буквами алфавита, круглые десятки (20, 30.... 90) девятью слѣдующими буквами, затѣмъ круглыя сотни—100, 200, 300, 400 выражались четырьмя остальными, потому что въ еврейскомъ алфавитѣ было всего навсего 22 буквы. И вотъ для остальныхъ круглыхъ сотенъ буквъ недоставало. Первоначально этотъ недостатокъ пополнялся тѣмъ, что вмѣсто 500 писали 400+100, 600=400+200 и т. д. Потомъ догадались отсѣчь концы у 5 слишкомъ длинныхъ буквъ (Капхъ, Мемъ, Нунъ, Пхе, Тцаде) и этими концами начали обозначать остальныя сотни. Еврейскія цифры см. въ приложеніи 8-мъ, въ концѣ книги.

Тысячи обозначались опять при помощи 9 первыхъ буквъ, но только надъ ними ставились точки, чтобъ не смѣшать съ простыми единицами. Чтобъ отличать числа отъ словъ, употребляли въ первомъ случаѣ особый знакъ. Цифры писались отъ правой руки къ лѣвой, въ порядкѣ уменьшающейся величины значеній: слѣдовательно, разряды низшіе писались влѣво, а не вправо, какъ пишутся у насъ. Впрочемъ, у всѣхъ народовъ такъ наз. семитическаго корня, т.-е евреевъ, вавилонянъ, арабовъ, финикіянъ, эфіоповъ, ассиріянъ, письмо шло противоположно нашему, т.-е. отъ правой руки къ лѣвой.

Сирійцы. Ихъ цивилизація относится къ гораздо болѣе позднѣйшимъ временамъ, чѣмъ финикійская, халдейская, египетская и т. д. Ихъ можно бы назвать въ нѣкоторомъ родѣ преемниками финикіянъ. По крайней мѣрѣ, въ III в. по Р. Х. мы встрѣчаемъ у сирійцевъ цифры, которыя очень похожи на тѣ, какія были въ Финикіи за много лѣтъ до Р. Х. Позднѣе эти цифры были отброшены, и, начиная приблизительно съ VII в. по Р. Х., сирійская литература содержитъ буквы алфавита вмѣсто цифръ. Здѣсь мы находимъ то же самое, что въ Греціи и у евреевъ. Сирійскій алфавитъ, какъ и еврейскій, содержитъ 22 буквы. Для выраженія простыхъ единицъ, круглыхъ десятковъ и сотенъ отъ 100 до 500, буквъ алфавита было достаточно, какъ видимъ мы и у евреевъ. 500, 600 и далѣе до 1000 сирійцы означали при помощи сложенія, такъ что 500=400+100, 600=400+200 и т. д. Круглыя тысячи они писали какъ простыя единицы, только внизу налѣво приписывали запятую. Значеніе десятковъ тысячъ давалось единицамъ и десяткамъ при помощи маленькой горизонтальной черточки, которою подчеркивались цифры. Значеніе милліона давалось 2-мя запятыми.

Славяне. Составитель славянскаго алфавита, св. Кириллъ, заимствовалъ систему цифръ цѣликомъ у грековъ. Какъ греки пользовались буквами своего алфавита, такъ и для славянъ была составлена таблица, схожая даже до мелочей съ греческою. *Напр., почему* 2 обозначается по славянски черезъ вѣди, а не черезъ буки? Потому что въ греческомъ языкѣ нѣтъ отдѣльныхъ звуковъ «б» и «в», а есть для нихъ общая буква «вита» или «бета». Почему фита обозначаетъ девять, хотя ей мѣсто въ самомъ концѣ алфавита? Потому что въ греческомъ языкѣ ей соотвѣтствуетъ буква ϑ, которая и стоитъ здѣсь на своемъ мѣстѣ, а не въ концѣ алфавита. Червь, обозначающій 90, поставленъ вмѣсто коппы, такъ какъ по-гречески нѣтъ звука «ч» совсѣмъ, а по-славянски нѣтъ коппы. Вотъ рядъ славянскихъ цифръ:

а҃ = 1, в҃ = 2, г҃ = 3, д҃ = 4, є҃ = 5, ѕ҃ = 6, з҃ = 7, и҃ = 8, ѳ҃ = 9, і҃ = 10, к҃ = 20, л҃ = 30, м҃ = 40, н҃ = 50, ѯ҃ = 60, о҃ = 70, п҃ = 80, ч҃ = 90, р҃ = 100, с҃ = 200, т҃ = 300, ѵ҃ = 400, ф҃ = 500, х҃ = 600, ѱ҃ = 700, ѿ҃ = 800, ц҃ = 900.

Тысячи обозначаются тѣми же буквами, какими и единицы, но съ добавленіемъ значка, который ставится налѣво отъ цифръ, выражающихъ количество тысячъ. Вообще славянская система—полнѣйшая копія греческой: такъ же берутся буквы алфавита, похоже обозначаются тысячи, и даже есть наклонность къ счету миріадами, т.-е. десятками тысячъ. Впрочемъ, большія числа въ старинныхъ рукописныхъ славянскихъ сборникахъ встрѣчаются не очень часто. Ниже, въ прилож. 9-мъ, приводимъ мы обозначенія большихъ количествъ: тьмы, легіона, леодра, врановъ. Эти изображенія встрѣчаются въ старинныхъ рукописяхъ грамматическихъ, но не ариѳметическихъ, такъ какъ въ ариѳметическихъ рукописяхъ 16—17 столѣтія предпочитаютъ пользоваться цифрами обыкновенными, которымъ мы даемъ названіе арабскихъ.

Римляне. Ихъ система цифръ не принадлежитъ къ числу удобныхъ и разработанныхъ. Римляне были слабы въ ариѳметикѣ, и даже до того слабы, что имъ никакъ не удалось освободиться отъ пережитковъ старой пятеричной системы счета, и только они одни остались при счетѣ пятками въ то время, какъ всѣ другіе народы, начавши, быть-можетъ, тоже со счета пятками, сумѣли выработать чистый счетъ десятками. Цифры у римлянъ смѣшанныя: однѣ изъ нихъ обязаны своимъ происхожденіемъ наглядности, а другія представляютъ собой буквы.

Римскія цифры таковы: I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1000. Изъ этихъ семи знаковъ легко можно составить обозначенія всѣхъ чиселъ. Тысяча иногда обозначалась не черезъ M, а черезъ (I), т.-е. она обозначалась чертой среди 2 скобокъ. Согласно этому, и десятокъ тысячъ имѣлъ знакъ такой: ((I)), сто тысячъ (((I))), для милліоновъ брали ∞.

При помощи раздваиванія 3-хъ послѣднихъ знаковъ можно образовать 3 новыхъ цифры: I))=5000, I)))=50000, [illegible]=500000. Отсюда ясно видно, какъ получилось D для пятисотъ: это ничто иное, какъ тысяча (I), раздѣленная пополамъ, правая часть взята, а лѣвая откинута.

Значенія отдѣльныхъ знаковъ при письмѣ чаще всего складывались, напр., III=3, XIII=13, MDCCCLXVI=1866. Но если высшій знакъ стоялъ правѣе низшаго, то это выражало отниманіе, такъ.

напр., IX = 9, XC = 90. Вычитать обыкновенно можно было не больше одного знака, а прикладывать не больше 3-хъ однородныхъ. Кромѣ того, прежде чѣмъ писать число, его разлагали на единицы, десятки, сотни и т. д., и чтобы написать хотя бы 990, писали сперва 900, затѣмъ уже 90, т.-е. CMXC, а не отнимали прямо отъ тысячи десятокъ. Бывали, впрочемъ, изрѣдка и исключенія: IIX = 8, вмѣсто VIII; VIIII—9, вмѣсто IX; послѣдняя фигура (VIIII) была особенно употребительна на памятникахъ и плитахъ, потому что римляне любили точность, а между тѣмъ если подойти съ другой стороны, то IX покажется не 9-ю, а 11-ю (XI).

Только у однихъ римлянъ и видимъ мы отниманіе низшаго знака отъ высшаго, ни у какого другого народа нѣтъ подобнаго обыкновенія: если и ставился у иныхъ народовъ низшій знакъ передъ высшимъ, то онъ указывалъ обыкновенно на повтореніе, а не на отниманіе. Даже и въ произношеніи у римлянъ было вычитаніе, особенно же если вычиталось 2 или 1, такъ, напр., вмѣсто восемнадцати они говорили двадцать безъ двухъ. Только въ случаѣ тысячъ низшій знакъ показывалъ умноженіе и, напр., десять тысячъ можно было писать черезъ XM = 1000×10, а сто тысячъ черезъ CM; въ *послѣднемъ случаѣ являлась полная возможность смѣшать* 100000 съ 900, потому что не видно было, надо ли 1000 взять сто разъ или же отнять 100 отъ 1000.

Точно такъ же писали иногда MM, и въ этомъ случаѣ опять не видно было, сколько тысячъ обозначено этой формулой: или это двѣ тысячи (M+M), или тысяча тысячъ (M×M), и то и другое чтеніе имѣетъ свои основанія и можетъ считаться правильнымъ: приходилось догадываться по смыслу, какое именно число надо подразумѣвать въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ. Чтобы избѣжать сомнѣній и ошибокъ, римляне стали употреблять еще новый пріемъ, по которому тысячи обозначались горизонтальной линіей вверху: этимъ пріемомъ 1000 пишется I, 100000 = $\overline{C}$, 1000000 = $\overline{M}$, равнымъ образомъ $\overline{CC}$ = 200000, $\overline{CLX}$ = 160000. Знакъ $\overline{}|$ надъ цыфрами придавалъ имъ значеніе сотенъ тысячъ, такъ напримѣръ, $|\overline{XVII}|$ = 1700000, $|\overline{M}|$ = 1000. 100000 = 100 000 000. Знаменитый ученый и естествоиспытатель Плиній (въ I вѣкѣ по Р. X.) ввелъ знакъ для тысячъ точку, слѣдовательно L.D = 50500. Встрѣчаемъ и еще обозначеніе: Vm.—5000.

Теперь мы видимъ и ясно можемъ убѣдиться, насколько весь порядокъ нумераціи у римлянъ былъ сбивчивъ, непослѣдователенъ и могъ представить много поводовъ къ толкованіямъ въ ту и другую сторону. Вѣрнѣе всего мы отъ римлянъ заимствовали обыкновеніе, чтобъ сумму денегъ въ разныхъ векселяхъ, распискахъ и т. д. писать не только цифрами, но и словами. Для римлянъ это было очень важно и настоятельно необходимо, потому что всѣ эти черточки при цифрахъ легко можно стереть, продолжить и пополнить. Исторія передаетъ намъ случай, когда изъ-за неясности написаннаго ряда цифръ произошелъ большой споръ относительно завѣщаннаго наслѣдства. Гальба получилъ отъ Ливіи Августы по завѣщанію 50 милліоновъ сестерцій (приблиз. 5 милліоновъ рублей), но Тиверій, главный наслѣдникъ, сумѣлъ доказать, что подъ этими цифрами надо разумѣть только 500 000 сестерцій; ему это удалось тѣмъ легче, что сумма денегъ не была написана словами.

При выговариваніи большихъ чиселъ у римлянъ не было въ распоряженіи другихъ словъ, кромѣ тысячи. Поэтому 1000 000 000 они читали такъ: тысячью тысяча разъ по тысячѣ.

Относительно происхожденія римскихъ цифръ существуетъ много различныхъ мнѣній и догадокъ. Нѣкоторые полагаютъ, что начало этимъ цифрамъ дано буквами стариннаго алфавита. Другіе объясняютъ такъ: первыя три цифры I, II и III само собой понятны: онѣ произошли отъ счета линій; цифра V образовалась изъ картины руки, т.-е. пяти пальцевъ, потому что, если бы очертить кисть руки съ раздвинутыми пальцами, то и получилась бы фигура, напоминающая цифру V: цифра десять своею формой косого креста разлагается на 2 пятка $\overset{\vee}{\wedge}$, приложенныхъ другъ къ другу острыми концами; «C», которое обозначаетъ сто, является первой буквой числительнаго „Centum“, что значитъ сто: M—тысяча, это начальная буква латинскаго слова: «Mille» (тысяча). О томъ, какъ получился знакъ пятисотъ D, нами уже сказано выше. Такъ же можно объяснить и знакъ пятидесяти L, именно сто $\overline{}\!\underline{}$, а 50 = $\underline{|}$, т.-е. знакъ ста раздвоенъ на двѣ половины , изъ которыхъ нижняя взята, а верхняя половина отброшена.

Происхожденіе нашихъ цифръ.

Тѣ цифры, которыя употребляются въ настоящее время почти всѣми образованными народами, и которыми пользуемся также и мы, *называются обыкновенно арабскими; но это названіе онѣ получили вовсе не потому, что обязаны своимъ происхожденіемъ арабамъ: арабы* ихъ только принесли въ Европу, а начало имъ дали, по всей вѣроятности, индусы.

Дѣйствительныя, подлинныя арабскія цифры не имѣютъ никакого *отношенія къ нашимъ, которыми мы пользуемся теперь.* Прежде всего надо сказать, что первоначальное письмо арабовъ было грубо и некрасиво, и едва ли до VII в. по Р. Х. были у нихъ какія-нибудь цифры. Только со временъ Магомета, когда сразу былъ данъ чрезвычайный толчекъ развитію арабскаго могущества и образованности, *стало у нихъ процвѣтать и письмо.* Арабы особенно любили выражать числа такъ, чтобы писать полныя числительныя имена: отсюда естественно вытекаетъ, что съ теченіемъ времени они перешли къ первымъ буквамъ числительныхъ именъ, впослѣдствіи, подобно грекамъ, они стали примѣнять буквы въ алфавитномъ порядкѣ.

Около 773 года по Р. Х. арабы приняли индусскую систему цифръ и стали обозначать числа такъ, какъ ихъ обозначали индусы. Сдѣлать это было тѣмъ болѣе легко и естественно, что Индія граничила съ владѣніями арабскихъ халифовъ, и между сосѣдями постоянно были *близкія сношенія и торговыя, и научныя.*

Заслуга индусовъ въ развитіи ариѳметики громадна и неисчислима. Во-первыхъ, они сильно уменьшили количество цифръ и довели его до 10, считая въ томъ числѣ и нуль; между тѣмъ, у грековъ, у евреевъ, у сирійцевъ и т. д. цифръ было не менѣе 27; правда, римляне умѣли обходиться 7-ю цифрами, но за то у нихъ была масса мелкихъ значковъ, которые только спутывали и мѣшали. Во-вторыхъ, въ индусской системѣ ясно проглядываетъ *необыкновенная* простота, точность и общепонятность; каждый разрядъ выражается обязательно *одной цифрой, а не нѣсколькими; значеніе цифры легко угадать по* мѣсту, которое она занимаетъ, и не надо задумываться ни надъ сложеніемъ, ни надъ вычитаніемъ сосѣднихъ знаковъ, какъ это бываетъ въ другихъ системахъ; кромѣ того, десятки, сотни, тысячи и милліоны и высшіе разряды пишутся точно такъ же, какъ простыя единицы, поэтому не надо изобрѣтать особенныхъ правилъ для высшихъ разрядовъ, а можно безконечно прилагать одно и то-же правило. Всѣ эти выгоды настолько ясны и безспорны, что всякій народъ, какъ только ознакомится со способомъ индусовъ и пойметъ его, то перемѣняетъ свою систему на ихъ систему. Такъ было и съ арабами, и съ Западной Европой, и съ нами русскими.

Главное преимущество индусской системы заключается въ томъ, что значеніе каждой цифры вполнѣ опредѣляется ея мѣстомъ, т.-е. если, наприм., цифра стоитъ на 4-мъ мѣстѣ справа, то она выражаетъ тысячи, и слѣд., чтобы написать тысячу, надо только поставить цифру **1** на 4-е мѣсто, но не перемѣнять ея формы и не приписывать какого-нибудь особеннаго слова или значка. Въ глубокой древности встрѣчались и среди иныхъ народовъ геніальные умы, которые какъ-то смутно догадывались, что значеніе цифры лучше всего опредѣляется ея мѣстомъ; но всѣ они становились въ тупикъ передъ такимъ сомнѣніемъ: а какъ же быть, если какой-нибудь разрядъ въ числѣ пропущенъ, напр., если число состоитъ только изъ единицъ и сотенъ и не содержитъ десятковъ? Чѣмъ замѣщать недостающіе разряды? Индусы отвѣчали коротко и ясно: надо замѣщать нулемъ. И мы теперь, когда отвѣтъ извѣстенъ, пожалуй, удивляемся, чего тутъ труднаго, и какъ же было не смекнуть; но жизнь доказываетъ лучше всякихъ словъ, что самыя простыя и общія идеи всегда и самыя мудреныя. Вотъ что говоритъ относительно этого извѣстный французскій математикъ Лапласъ: «Мысль выражать всѣ числа 9-ю знаками, придавая имъ, кромѣ значенія по формѣ, еще значеніе по мѣсту, настолько проста, что именно изъ-за этой простоты трудно понять, насколько она удивительна. Какъ нелегко было прійти къ этой методѣ — мы видимъ ясно на примѣрѣ величайшихъ геніевъ греческой учености, Архимеда и Аполлонія, для которыхъ эта мысль осталась скрытой».

Всѣ величайшія открытія никогда не являются вдругъ и сразу, наоборотъ, для нихъ необходима продолжительная подготовка. Какъ же могли индусы прійти къ идеѣ обозначенія чиселъ? какъ они придумали нуль? Вѣрнѣе всего послѣ счета нагляднаго, т.-е. счета на пальцахъ, камешкахъ и черточкахъ они перешли къ спеціальнымъ счетнымъ приборамъ, именно къ шарикамъ и косточкамъ на проволокахъ и шнурахъ; затѣмъ естественно было чертить колонны на пескѣ, дощечкахъ и бумагѣ и въ эти колонки или желобки класть тѣ же косточки и шарики. Дальнѣйшая ступень: въ колоннахъ чертятся значки или кладутся въ нихъ костяшки съ награвированными цифрами: теперь остался одинъ шагъ и до того, чтобъ цифрамъ придавать значеніе по мѣсту: дѣйствительно, если всѣ колонны заняты, то ихъ края, пожалуй, можно и стереть, потому что и безъ нихъ можно догадаться, что первая справа костяшка обозначаетъ единицы, сосѣдняя, т.-е. вторая, десятки и т. д. Получится гладкая, ровная поверхность, на которой подрядъ лежатъ костяшки, или начерчены значки: но какъ же быть съ той колонной, въ которой нѣтъ значка, потому что въ данномъ числѣ нѣтъ соотвѣтствующихъ единицъ? Подобную колонну стирать нельзя, потому что иначе смыслъ всѣхъ другихъ, лежащихъ влѣво, измѣнится, но ее-то одну именно и достаточно начертить, положимъ въ такой формѣ: || или II или 0. *Слѣдовательно, нуль образовался изъ фигуры пустой колонны.*

Вотъ тотъ нормальный путь, которымъ можно постепенно отъ счета на предметахъ прійти къ нулю. Путь этотъ очень продолжителенъ. Нужны тысячелѣтія, чтобы отъ пальцевъ перейти къ счетнымъ приборамъ, и отъ нихъ къ письму.

Цифры индусовъ произошли, навѣрное, отъ первыхъ буквъ числительныхъ именъ: это тѣмъ болѣе возможно, что 9 первыхъ числительныхъ именъ въ ихъ языкѣ (въ санскритскомъ языкѣ) всѣ начинаются съ различныхъ буквъ. Индусская система разстановки цифръ отъ правой руки къ лѣвой по разрядамъ ведетъ начало съ III ст. по Р. X. Арабы ее переняли въ VIII столѣтіи и принесли въ Европу въ IX вѣкѣ, но до XIII вѣка она распространялась въ христіанскихъ государствахъ очень слабо, потому что сначала, какъ и все новое, была встрѣчена съ недовѣріемъ и съ трудомъ проникала въ народную массу. Нулемъ индусы стали пользоваться гораздо позже, около VII-го или VIII-го вѣка по Р. X. и во всякомъ случаѣ не ранѣе V-го. Опредѣленное извѣстіе о нулѣ мы встрѣчаемъ въ первый разъ въ 738 г. по Р. Х.

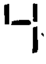
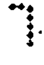
Наши цифры 1, 2. 3, 4, 5. 6, 7, 8. 9. 0 получили, какъ признаетъ большинство ученыхъ. начало отъ индусовъ, но это вовсе не значитъ, что цифры индусовъ имѣли именно такой видъ, какой онѣ имѣютъ у насъ.

Въ теченіе вѣковъ. переходя отъ народа къ народу и отъ ученаго къ ученому, измѣняясь подъ вліяніемъ практики и удобства, онѣ успѣли почти совершенно потерять свою прежнюю форму и вылиться въ новую, непохожую; отъ старинныхъ первоначальныхъ индусскихъ цифръ остались только слабые намеки въ цифрахъ 1, 5, 8, да и то послѣдняя цифра писалась въ горизонтальномъ положеніи, вмѣсто вертикальнаго; но во всякомъ случаѣ совершенно возможно прослѣдить, какъ изъ первоначальныхъ фигуръ постепенно получились дальнѣйшія: и вотъ эта-то возможность прослѣдить и доказываетъ намъ, что цифры получили начало у индусовъ. Въ XIII столѣтіи, когда индусская система сдѣлалась извѣстной всѣмъ европейскимъ математикамъ, мы видимъ 1, 3, 6, 8, 9, 0 въ той самой формѣ, въ какой онѣ употребляются и теперь, а остальныя четыре цифры не похожи на наши нынѣшнія. Въ XV столѣтіи окончательно выработались цифры 2 и 4, но 7 упорно продолжало писаться въ видѣ ижицы или угла. 5 дольше всѣхъ не получало нынѣшняго своего облика и продолжало изображаться схоже съ 4-мя. Едва въ XVI столѣтіи можно въ первый разъ встрѣтить систему 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0 въ ея нынѣшнемъ, всѣмъ намъ извѣстномъ видѣ. Всю эту измѣнчивость цифръ легко объяснить тѣмъ. что до 1471 года, когда было отпечатано въ первый разъ математическое сочиненіе типографскимъ шрифтомъ. всѣ книги переписывались ручнымъ способомъ, и вліяніе переписчиковъ на измѣненіе формъ цифръ могло быть громаднымъ. Кромѣ того, надо принять во вниманіе, что развитіе цифровыхъ фигуръ шло въ теченіе многихъ сотенъ лѣтъ, и въ немъ принимали участіе почти всѣ образованные народы того времени. И если въ наши дни. когда образованіе достигло высокой степени объединенія, когда печатные шрифты получили устойчивую форму, все-таки замѣчается разнообразіе въ печатныхъ буквахъ и въ различныхъ почеркахъ, то тѣмъ болѣе оно должно было проявляться въ средніе вѣка, когда произволу переписчиковъ открывалась широкая возможность. (Образцы различныхъ типовъ цифръ мы помѣщаемъ въ приложеніи 10-мъ въ концѣ книги.)

Итакъ, мы изложили, какъ постепенно изъ индусскихъ цифръ образовались наши нынѣшнія. Однако же не всѣ ученые согласны съ тѣмъ, что дѣло шло именно такъ, а не иначе. Нѣкоторые изъ нихъ обратили вниманіе на то, что первыя 4 цифры древнихъ египтянъ, которыми выражаютъ порядковыя числительныя, и, кромѣ того, цифра 9 сильно напоминаютъ индусскія цифры. Если это такъ, то, значитъ, изобрѣтателями цифръ скорѣе надо счесть египтянъ, а не индусовъ. На это мы отвѣтимъ слѣдующее: подобное предположеніе очень возможно, тѣмъ болѣе, что есть въ исторіи намеки на какой-то древнѣйшій, миѳическій народъ — кушитовъ, обитателей Эѳіопіи и южной части Аравіи, они легко могли быть посредниками между Египтомъ и Индіей и передать цифры отъ египтянъ къ индусамъ.

Второе возраженіе ученыхъ касается того, что истиннымъ посредникомъ въ переносѣ индусскихъ цифръ въ Европу можно бы считать греческаго ученаго Пиѳагора, жившаго за 500 лѣтъ до Р. Х. Въ такомъ случаѣ изобрѣтеніе цифръ отодвигается очень далеко. И это предположеніе опять можно допустить, потому что есть преданіе, что Пиѳагоръ много путешествовалъ, заходилъ въ далекіе края Азіи и вывезъ оттуда немало цѣнныхъ научныхъ пріобрѣтеній. Но съ другой стороны, гораздо лучше дать вѣру иному предположенію, именно, что цифры индусовъ заимствовалъ не Пиѳагоръ, а его позднѣйшіе ученики, такъ наз. новопиѳагорейцы, жившіе въ Александріи, въ Египтѣ, во II — III ст. по Р. Х. Они согласно этому предположенію сообщили цифры арабамъ, властителямъ сѣвернаго берега Африки и Испаніи, — маврамъ, а отъ арабовъ могли заимствовать испанцы и итальянцы.

Послѣдняя догадка, касающаяся нашихъ цифръ и, надо сказать, очень неосновательная, хотя и распространенная, заключается въ слѣдующемъ.

Будто бы каждая цифра образовалась изъ столькихъ точекъ или изъ столькихъ черточекъ, сколько въ этомъ числѣ единицъ. Если такъ, то цифра 4 состоитъ изъ , цифра 8 изъ , цифра 7 изъ . Но этого никакъ не можетъ быть, потому что это чрезвычайная натяжка и одна только игра остроумія. Такимъ путемъ можно всякую цифру привести къ столькимъ черточкамъ или точкамъ, къ сколькимъ угодно. Цифру 3, напр., можно замѣнить ∆, и тогда вышло бы, что она выражаетъ собою число 6. Конечно, единица подходитъ подъ эту гипотезу, и римскія цифры I, II, III, IIII совершенно соотвѣтствуютъ ей, но съ индусскими цифрами ничего не сдѣлать. Лучшимъ же доказательствомъ несообразности является историческое развитіе цифръ, при которомъ онѣ много, много разъ мѣняли свою форму, дѣлались неузнаваемыми, походили одна на другую, и только точное изслѣдованіе историковъ могло разобраться и доказать, какъ изъ одной первоначальной формы вылилась другая окончательная, путемъ многихъ и долгихъ преобразованій. Да и странно было бы думать, что изобрѣтатели цифръ такіе глубокіе мудрецы, что вложили въ каждую цифру таинственный символъ и образовали цифры изъ соотвѣтствующаго числа черточекъ и точекъ.

Какъ сказано уже нами выше, цифры индусовъ были принесены въ Европу въ IX в. по Р. Х., но до XIII в. онѣ распространялись очень слабо.

Причиной этого является недовѣріе, съ которымъ ученые среднихъ вѣковъ встрѣтили новинку, хотя бы и полезную. Средневѣковая школьная ученость (схоластика) правда не гнушалась свѣтскими науками, но въ то же время она слишкомъ высоко ставила латинскій языкъ и римскую цивилизацію.

Западная Европа явилась преемницей и носительницей научныхъ идей древняго Рима, поэтому-то такъ натурально вышло, что средневѣковая ариѳметика пользовалась исключительно римскимъ абакомъ (см. выше стр. 23) и римскими цифрами; хотя едва ли римляне оставили другое болѣе неудачное и несовершенное наслѣдіе, чѣмъ ихъ система ариѳметики. Во всякомъ случаѣ преданіе, инерція превозмогли все, и долго, долго не рѣшались ученые среднихъ вѣковъ порвать связь съ абацистами, т.-е. послѣдователями римской ариѳметики, и превратиться въ «алгоритмиковъ», поклонниковъ учености арабской. Несмѣлыми шагами и тайкомъ, боясь навлечь на себя страшное обвиненіе въ еретичествѣ, пробирались сильные умомъ и волею ученые монахи въ Испанію, чтобы тамъ, въ центрахъ мавританской учености, въ Барселонѣ и Толедо, напитаться открытіями свѣжей и новой, чуждой имъ, образованности. Такъ сдѣлалъ Гербертъ, свѣтлый умъ своего времени, достигшій папскаго престола подъ именемъ Сильвестра II, († 1003). Крестовые походы, съ ихъ массовымъ передвиженіемъ цѣлыхъ народовъ изъ странъ Европы въ государства Азіи, много содѣйствовали усвоенію науки греческой, арабской, персидской и индусской. Можно сказать, что ариѳметика едва ли въ такой степени обязана своимъ развитіемъ другому историческому движенію, въ какой она обязана Крестовымъ походамъ. И замѣчательно, что итальянцы, эти посредники въ сношеніяхъ Европы съ Азіей, особенно чувствовавшіе вліяніе Крестовыхъ походовъ, такъ какъ чрезъ нихъ шла волна народа въ Азію, явились въ то же время и лучшими математиками. Индусы дали зерно настоящей ариѳметики, а итальянцы его выростили.

По роду своихъ занятій прикосновенные къ морской торговлѣ (недаромъ Христофоръ Колумбъ былъ родомъ итальянецъ), они особенно нуждались въ ариѳметикѣ для своихъ коммерческихъ вычисленій, примѣняли ее въ банкахъ, конторахъ и т. д. и увѣковѣчили свое имя въ терминѣ «итальянская бухгалтерія». Индусы любили ариѳметику безкорыстно, какъ искусство, и до того ею увлекались, что даже устраивали цѣлые турниры и состязанія въ рѣшеніи ариѳметическихъ задачъ, итальянцы же приспособили ее прежде всего для цѣлей узкожитейскихъ.

Еще нѣсколько словъ объ индусахъ: имъ мы такъ обязаны усовершенствованіемъ ариѳметики. Это былъ народъ высоко-культурный, склонный къ отвлеченному мышленію. Едва ли какой-нибудь другой народъ на цѣломъ свѣтѣ любилъ настолько жить въ мірѣ идей, какъ это видимъ у индусовъ. Ихъ чистые созерцатели «факиры» пользуются всемірной извѣстностью. Обѣ самыхъ распространенныхъ религіи Азіи, буддизмъ и браминизмъ, получили свое начало въ Индіи. Согласно съ этимъ, математика отличалась у индусовъ идейнымъ, отвлеченнымъ характеромъ и носила алгебраическую окраску, въ противоположность грекамъ, поклонникамъ природы и наглядности, которые болѣе любили устремляться на геометрическія построенія. Въ полетѣ своей математической фантазіи индусы явились изобрѣтателями даже не одной, а многихъ ариѳметическихъ системъ. Такъ, напр., индусъ Аріабгатта, ученый V в. по Р. Х., бралъ 25 согласныхъ буквъ и ими выражалъ всѣ числа, начиная съ единицы и оканчивая 25-ю, особыми же буквами обозначалъ онъ и полные десятки до 100; а чтобы обозначить сотни, тысячи и т. д., онъ къ предыдущимъ знакамъ придавалъ гласныя буквы, при чемъ особая гласная обозначала сотни, особая тысячи и т. д. Напримѣръ, «д» значитъ три, «ді»—300, «ди»=30 000, «де» 30 000 000 000. Математики Южной Индіи для каждаго изъ однозначныхъ чиселъ имѣли по нѣскольку особыхъ знаковъ, — буквъ, также имѣлось нѣсколько особыхъ знаковъ въ видѣ буквъ и для нуля. И вотъ, когда имъ приходилось обозначать разряды какого-нибудь длиннаго числа, они старались вмѣсто цифръ подставить буквы такъ, чтобы изъ нихъ составилось какое-нибудь слово, имѣющее смыслъ. Мало того, когда имъ приходилось запоминать не одно число, а нѣсколько, то они рядъ чиселъ замѣняли цѣлой фразой, которая, опять-таки, имѣла смыслъ. И наконецъ, что всего удивительнѣе, при длинномъ рядѣ чиселъ, когда изъ нихъ составлялось нѣсколько фразъ, индусы ухитрялись сочинять цѣлые стихи и такимъ образомъ запоминать длинныя таблицы; для этого, конечно, нужна большая сноровка и многолѣтнія упражненія. И въ наше время среди индусовъ встрѣчаются такіе виртуозы, что въ умѣ совершаютъ головоломнѣйшія вычисленія, не прибѣгая къ помощи цифръ. Главный секретъ успѣха заключается въ этомъ случаѣ въ томъ, что они при устномъ счетѣ легко запоминаютъ всѣ промежуточные результаты, не теряютъ ихъ и не сбиваются, какъ это непремѣнно случилось бы съ нами; кромѣ того, конечно, помогаетъ имъ и привычка къ искусственнымъ и сокращеннымъ пріемамъ вычисленія, когда возможно столько упрощеній.

Распространеніе индусскихъ цифръ въ Россіи.

Какія были цифры у нашихъ предковъ до введенія христіанства? Вѣрнѣе всего никакихъ.

Для своихъ убогихъ разсчетовъ, надо полагать, они пользовались или пальцами, или нарѣзками на палочкахъ, иначе сказать бирками, которыми и сейчасъ пользуется темное крестьянство. Знакомство съ греками, введеніе христіанства и переводъ священныхъ книгъ на славянскій языкъ привели къ тому, что въ Россіи появилась своя славянская система цифръ, какъ простая копія и сколокъ греческой системы. Нерадостна и незавидна была участь ариѳметики въ Россіи. Нужды въ ней никакой особой не чувствовалось, по отсутствію образованности и торговли, и примѣнять ее необходимо было развѣ для вычисленія пасхаліи, т.-е. для опредѣленія дня Пасхи и другихъ переходящихъ праздниковъ. Наоборотъ, надо сказать, на ариѳметику смотрѣли косо, неласково и съ подозрѣніемъ; она была на замѣчаніи вмѣстѣ съ «Остронумѣей», еже есть «звѣздочетье», и «волхвованіемъ». По мнѣнію проф. Бобынина, появленіе въ Россіи первыхъ ариѳметическихъ рукописей должно быть отнесено къ началу XII вѣка. Среди нихъ самая извѣстная: «Кирика діакона и доместика Новгородскаго Антоніева монастыря ученіе, имже вѣдати человѣку числа всѣхъ лѣтъ». Подлинники старинныхъ рукописей, къ большому сожалѣнію для науки, утерялись постепенно въ теченіе столѣтій, а также не перестають утериваться и въ наши дни. Такъ, во время пожара Москвы въ 1812 году погибла древнѣйшая ариѳметика (XVI в.). «Сія книга рекома по-гречески Ариѳметика, а по-нѣмецки Алгоризма, а по-русски Цифирная Счетная мудрость». Самою замѣчательною изъ сохранившихся рукописей Бобынинъ признаетъ ариѳметику XVII в. съ такимъ характернымъ предисловіемъ: «Пятая мудрость въ семи великихъ мудростѣхъ нарицается Ариѳметика. Начало мудростемъ: Грамматика, Геометрія, Астрономія, Музыка. Тѣ 4 мудрыя книги. Сія мудрость есть изыскана древними философи остронаримаго разума, нарицается ариѳметика, сирѣчь счетная-ариѳмосъ по-гречески счетъ толкуется. Безъ сея мудрости ни единъ философъ, ни докторъ не можетъ быти. По сей мудрости гости по государствамъ торгуютъ и во всякихъ товарѣхъ и въ торгѣхъ силу знаютъ, и во всякихъ вѣсахъ и въ мѣрахъ, и въ земномъ верстаніи, и въ морскомъ теченіи. Сія мудрость есть многихъ въ прикупѣхъ корысти сподобляетъ и честь даруетъ и умъ человѣческій высоконаривъ творитъ, и память укрѣпляетъ, и острыхъ острѣе творитъ въ разумъ. И сего ради слыши сію мудрость и вонми же глаголетъ. А р и ѳ м е т и к а. Азъ есмь отъ Бога свободная мудрость высокозрительнаго и остромысленнаго разума и добродатное придарованіе человѣческое. Мною человѣкъ превосходитъ безсловесное неразуміе. Азъ бо есмь своима легкима крылома парю выспрь подъ облаки, аще и нѣсть мя тамо. Азъ заочныя, невидимыя и предъочныя дѣла объявляю: въ солнечномъ же и въ лунномъ теченіи разумъ многимъ подаваю: и въ морскомъ плаваніи и въ земномъ верстаніи наставляю и мѣру указую; и въ купеческихъ вещѣхъ, и во всякихъ числѣхъ недоумѣніе разрѣшаю. И сего ради отъидете отъ меня иже меланхоліею обдержаны суть, и у которыхъ мозги съ черною желчью смѣшаны, а моимъ ученикомъ достоитъ имѣти суптильный чистый и высокій разумъ».

Такія пышныя предисловія составляютъ характерную черту ариѳметикъ этого періода. Текстъ въ нихъ писанъ славянскими буквами, и цифры употребляются въ большинствѣ славянскія. Индусскія цифры сдѣлались извѣстными въ Россіи съ 1611 года и появились первоначально въ тѣхъ славянскихъ книгахъ, которыя печатались въ юго-западныхъ типографіяхъ. Здѣсь сказывается польское вліяніе: оно энергично воздѣйствовало на Россію въ XVII ст. и много сообщило намъ такого, что само получило отъ западно-европейской культуры.

Первоначально индусскія цифры употреблялись только для обозначенія страницъ въ книгахъ, а самый текстъ довольствовался славянскими цифрами. Въ 1647 г. въ Москвѣ издали книгу подъ заглавіемъ: «Ученіе и хитрость строенія пѣхотныхъ людей», въ ней цифры уже новыя, а не старыя — церковно-славянскія. Въ «Юрналѣ объ осадѣ Нотебурга» (1702 г.) половина экземпляровъ имѣла «числа русскія», т.-е. со славянскими цифрами, а другая «цифирныя».

Классическій и знаменитый трудъ по части ариѳметики — «Ариѳметика, сирѣчь наука числительная. Съ разныхъ діалектовъ на славенскій языкъ переведеная, и во едино собрана и на двѣ книги раздѣлена. Въ лѣто отъ сотворенія міра ҂зсі, отъ Рождества Бога Слова ҂аѱг. Сочинися сія книга чрезъ труды Леонтія Магницкаго». Это извѣстная ариѳметика Магницкаго (1703 г.), по которой учились всѣ во времена Петра Великаго: по ней работалъ самоучкой и нашъ великій Ломоносовъ. Это книга большого формата, напоминающая своей формой и шрифтомъ церковное Евангеліе или скорѣе Апостолъ. Въ ней болѣе 300 страницъ. Весь шрифтъ и обозначеніе страницъ — славянскіе, вычисленія же производятся на индусскихъ цифрахъ. Нумерація прямо и рѣшительно къ нимъ и переходитъ, минуя совершенно старые славянскіе знаки. «Что есть нумерацію: нумерацію есть счисленіе еже совершенно вся числа рѣчію именовати, яже въ десяти знаменованіяхъ или изображеніяхъ содержатся и изображаются еще: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0».

Во времена послѣ-петровскія совершенно исчезаютъ славянскія цифры и славянскій текстъ. Книги принимаютъ такой шрифтъ и такую форму, какими мы пользуемся и теперь. Напоминаетъ лишь о старыхъ временахъ тяжелый слогъ и неупотребительныя въ настоящемъ литературномъ языкѣ выраженія. Вотъ выдержка изъ руководства къ ариѳметикѣ «для употребленія гимназіи при императорской академіи наукъ», переведеннаго въ 1740 г. съ нѣмецкаго языка «чрезъ Василья Адодурова, академіи наукъ адъюнкта»: «Всякое число какъ бы оно велико ни было, изъявляется весьма коротко и способно слѣдующими знаками: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которыхъ знаменованіе, когда оныя порознь разсуждаются, довольно извѣстно, и того ради никакова изъясненія больше не требуетъ». Почти то же самое говорится и въ сочиненіи Румовскаго (1760 г.): «При счисленіи чиселъ больше не употребляется, какъ десять слѣдующихъ знаковъ: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, которыхъ знаменованіе всякому извѣстно». Замѣчательно, что у Румовскаго совершенно то же выраженіе, что и у Адодурова «которыхъ знаменованіе довольно извѣстно». Вотъ какъ любятъ авторы черпать одинъ у другого не только доказательства и мысли, но и случайныя фразы. Неудивительно поэтому, что въ нашихъ гимназіяхъ и реальныхъ училищахъ все еще рѣшаютъ по ариѳметикѣ такія задачи, какія были въ сборникахъ тысячу лѣтъ тому назадъ.

Приведемъ еще небольшія выписки. «Знаки, употребляемые въ печисленіи, суть слѣдующіе: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9». (Курсъ математики. Сочиненіе господина Безу. Переводъ Василья Загорскаго. 1806 г.). Въ руководствѣ къ ариѳметикѣ, для употребленія въ народныхъ училищахъ Россійской Имперіи, изданномъ „отъ Главнаго училищъ правленія“, 1825 г., говорится такъ: «Знаки чиселъ суть слѣдующіе: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Къ симъ еще принадлежатъ знакъ единицы 1, и знакъ 0, который по себѣ ничего не значитъ и потому нулемъ называется. Всѣ сіи знаки цифрами именуются». Какъ видимъ, въ этой книжкѣ новшество, именно знакъ 1 стоитъ отдѣльно. Объяснить такой фактъ можно вліяніемъ нѣкоторыхъ математиковъ, которые, согласно съ Пиѳагоромъ, учили, что единица сама по себѣ не есть число, но только образуетъ другія числа. Впрочемъ, подобное новшество скоро опять пропадаетъ, и уже въ 1834 году въ ариѳметикѣ, составленной Павломъ Цвѣтковымъ, мы читаемъ совершенно по-просту и безъ затѣй: „Всевозможныя числа изображаются десятью знаками или цифрами: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Каждая изъ сихъ цифръ означаетъ опредѣленное и постоянное число единицъ».

Выговариваніе цифръ и чиселъ.

Прежде всего, что значитъ слово «цифра»? Могу поспорить съ вами, читатель, что, не особенно задумываясь, вы быстро рѣшите этотъ вопросъ и скажете: слово «цифра» значитъ знакъ (а можетъ-быть, вы скажете—знакъ числа). Но это совершенно невѣрно. Слово «цифра» имѣетъ совсѣмъ другое значеніе и притомъ довольно неожиданное: по-русски это будетъ «ничто». Какъ же такъ „ничто“? вѣдь это нуль, а кромѣ нуля есть еще и значащія цифры, къ которымъ ужъ совсѣмъ нельзя примѣнить смысла «ничто»?

Объяснимъ все это недоразумѣніе подробно.

Изобрѣтатели нуля индусы дали ему названіе «суніа» ((Sunya), что значитъ «пустое», и этимъ указали на смыслъ нуля, замѣняющаго пустыя колонны или пустые разряды.

Арабы, перенявши нуль и примѣняя его въ своей ариѳметикѣ, перевели кстати и индусское слово «пустое» на свой языкъ: по-арабски пустое будетъ ас-сифръ. И долго, очень долго сохранялся первоначальный смыслъ этого термина, такъ что цифрой называли только кружокъ, т.-е. нуль. Сравнительно недавно рѣшились оставить цифрѣ нуль ея латинское имя (нуль по-латыни значитъ ничто), арабскій же терминъ распространить на всѣ 10 знаковъ индусской системы. Даже въ ариѳметикѣ Магницкаго, о которой мы говорили на предыдущихъ страницахъ, подъ цифрой разумѣется только нуль, кружокъ, или какъ его называли въ XVII в., «онъ» (буква о). Вотъ какъ говоритъ Магницкій: «Вся числа въ десяти знаменованіяхъ или изображеніяхъ содержатся, изъ нихъ же девять назнаменовательны суть, послѣднее-же 0 (еже цифрою или ничемъ именуется) егда убо (оно) едино стоитъ, тогда само о себѣ ничто-же значитъ, егда-же коему оныхъ знаменованій приложено будетъ, тогда умножаетъ въ десятеро“. Какъ видите, читатель, здѣсь вмѣсто слова цифра употребляется знаменованіе, а цифрой называется одинъ только нуль.

Таково происхожденіе слова «цифра». Чтобы перейти къ выговариванію чиселъ, прежде всего скажемъ, что всякій народъ, какой бы системой счета онъ ни пользовался, всегда дѣлилъ многозначныя числа, для удобства выговариванія и письма, на классы. Греки въ основу класса полагали 4 разряда: это, такъ наз., счетъ миріадами. Римляне же составляли классъ изъ 3 разрядовъ. Нашъ настоящій порядокъ, во всей его основѣ, примѣняться сталъ съ XVI столѣтія, при чемъ въ нѣкоторыхъ странахъ классъ составляется не изъ 3-хъ, а изъ 6-ти разрядовъ, подраздѣляющихся, въ свою очередь, на два подкласса, по 3 разряда въ каждомъ. Подобная система въ 6 разрядовъ ведетъ свое начало отъ голландскаго математика Альберта Жирара (1629 г.). Кстати можно вспомнить, что и у грековъ было нѣчто въ этомъ родѣ. Напр., великій математикъ Архимедъ, когда ему надо было выговаривать большія числа, считалъ въ каждомъ классѣ по 8 разрядовъ, вмѣсто 4-хъ.

Классы отдѣлялись другъ отъ друга при письмѣ различно: то между ними ставили черточки, то оставляли промежутки, иногда пользовались дугами, точками. Въ старинныхъ нѣмецкихъ учебникахъ можно чаще всего встрѣтить точки, и притомъ между 1 и 2 классомъ ставилась одна точка, между 2 и 3—двѣ и т. д., все больше и больше. Это помогало выговариванію. Въ самое послѣднее время (съ 8 окт. 1877 г.) принято въ Германіи и даже утверждено Союзнымъ совѣтомъ, чтобы классъ отъ класса отдѣлялся промежутками, но никакъ не точкой, запятой и черточкой. Съ тѣхъ поръ во многихъ математическихъ книгахъ стали пользоваться именно этимъ порядкомъ.

Названія большихъ чиселъ, начиная съ милліона, стали объединяться и вырабатываться прежде всего въ Италіи, которая въ началѣ новыхъ вѣковъ справедливо могла считаться колыбелью математики. Такъ, терминъ «милліонъ» вошелъ тамъ въ употребленіе въ концѣ XV вѣка. Слово «мильярдъ», въ смыслѣ тысячи милліоновъ, образовалось во Франціи въ первой половинѣ XIX вѣка. Билліонъ и трилліонъ введены въ XVII столѣтіи: но къ новымъ терминамъ привыкаютъ очень медленно, а потому и въ XVI столѣтіи можно было натолкнуться на такое чтеніе: 23 раза по тысячью тысячѣ тысячъ, 456 разъ по тысячѣ тысячъ, 345 тысячъ 678: все это равно числу 23 456 345 678.

Виды чиселъ.

Какую цѣль преслѣдуетъ ариѳметика въ нашихъ школахъ? Очевидно, она желаетъ научить дѣйствіямъ и рѣшенію практическихъ задачъ. Но не всегда эта цѣль такой и была, потому что въ различные вѣка и при разныхъ научныхъ системахъ она то суживалась, то расширялась, то уклонялась въ сторону. Она суживалась до вычисленія одной только пасхаліи въ средневѣковыхъ христіанскихъ школахъ; она расширялась до изученія алгебры у индусовъ и арабовъ, до извлеченія корней въ недавнее время и до пропорцій въ наши дни: и корни, и пропорціи такъ же чужды настоящей ариѳметикѣ и ея цѣлямъ, какъ «раздѣленіе вѣтровъ во оризонтѣ» и «изображеніе кумпаса», пріютившіяся въ ариѳметикѣ Магницкаго. Но самымъ уродливымъ уклоненіемъ нашей науки съ ея истиннаго пути было то, когда вмѣсто вычисленій и дѣйствій ученые занимались классификаціей чиселъ и открытіемъ ихъ таинственныхъ свойствъ. А стремленіе къ такимъ занятіямъ не разъ прорывалось наружу, особенно у людей, настроенныхъ мистически. Среди нихъ первое мѣсто занимаетъ греческій философъ Пиѳагоръ и его послѣдователи. Онъ жилъ за 500 лѣтъ до Р. Х. въ знаменательное время, когда приблизительно жили и дѣйствовали основатели новыхъ религій, Зороастръ въ Персіи и Конфуцій въ Китаѣ. То было мистически настроенное время, и Пиѳагоръ оказался усерднымъ его дѣтищемъ, такъ какъ вникалъ въ числа и искалъ въ нихъ ихъ внутренняго смысла. Онъ искалъ священныхъ чиселъ и выше всего ставилъ число 36, какъ символъ «всей вселенной», на томъ основаніи, что число 36 равно суммѣ первыхъ четырехъ четныхъ и первыхъ четырехъ нечетныхъ чиселъ: $36 = 1+3+5+7+2+4+6+8$; числомъ 36 пользовались ученики Пиѳагора, какъ торжественной формулой клятвы. Число 9 было у нихъ символомъ постоянства, такъ какъ всѣ кратныя 9-ти имѣютъ суммой цифръ все-таки 9, именно: у дважды девяти, т.-е. у 18, сумма цифръ $1+8=9$, у трижды девяти, т.-е. у 27-ми, $2+7=9$, у 36-ти $3+6=9$ и т. д. Число восемь было символомъ смерти, потому что кратныя 8-ми, т.-е. 16, 24, 32, 40 имѣютъ все меньшую и меньшую сумму цифръ: 7, 6, 5, 4. Единица, по Пиѳагору, обозначала духъ, изъ котораго проистекаетъ весь видимый міръ. Изъ единицы происходитъ двойка, символъ матеріальнаго атома. Принимая въ себя опять единицу, двойка, или матеріальный атомъ, становится тройкой, или подвижной частицей. Это символъ живого міра. Живой міръ плюсъ единица, слѣд., четверка, образуетъ цѣлое, т.-е. видимое и невидимое. Такъ какъ $10=1+2+3+4$, то оно выражаетъ собою «Все». Пиѳагорейцы провозглашали число началомъ и основаніемъ всѣхъ вещей, такъ какъ, по ихъ словамъ, природа числа не допускаетъ никакого обмана, она закономѣрна и неизмѣнна, она проникаетъ въ неизвѣстное.

Такими-то хитросплетенными умствованіями занимались пиѳагорейцы; они не были въ этомъ случаѣ одинокими, потому что извѣстно не мало и другихъ любителей таинственной, символической ариѳметики. Прежде всего назовемъ египтянъ, у которыхъ богъ Озирисъ представлялся числомъ 4, богиня Изида числомъ 3, а «Время» числомъ 5, и все это чертилось въ видѣ прямоугольнаго треугольника со сторонами 3, 4, 5, въ которомъ квадратъ гипотенузы, $5.5=25$, равенъ суммѣ квадратовъ катетовъ: $3.3+4.4$. Бредни халдеевъ относительно чиселъ доставили имъ славу волшебниковъ; каждый халдейскій богъ, отъ 1-го и до 60-го, имѣлъ свое особое число, ему посвященное; даже и духи не были обижены, потому что и имъ были посвящены числа, но только похуже—дробныя. Мистическое ученіе евреевъ, такъ наз., каббала (отсюда «каббалистическіе», т.-е. таинственные знаки) возникло за II вѣка до Р. Х. и развивалось вплоть до XIII столѣтія и далѣе. Первыя десять чиселъ считались у нихъ «путями премудрости».

Христіанская средневѣковая Европа тоже не лишена была стремленій къ таинственному символическому толкованію чиселъ. Епископъ майнцскій Рабанъ Мавръ въ IX в. рѣшалъ вопросы: почему Моисей и Илія постились ровно 40 дней? «А потому,—отвѣчаетъ Рабанъ,—что 40 состоитъ изъ 4 десятковъ и этимъ знаменуетъ временную жизнь, ибо 4 выражаетъ время, а въ 10-ти можно распознать Бога и Его творенія». Алькуинъ, другъ императора Карла Великаго, заинтересовался численной задачей: почему Св. Апостолъ Петръ поймалъ 153 рыбы? не больше и не меньше, а ровно 153? Алькуину казалось, что онъ нашелъ рѣшеніе: $153 = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10+11+12+13+14+15+16+17$, т.-е. число 153 равно суммѣ первыхъ 17-ти чиселъ. Но почему же именно 17-ти? На это Алькуинъ ничего не отвѣчаетъ.

Сколько труда и энергіи тратилось обыкновенно на эти изысканія и на эти изслѣдованія глубины числовыхъ отношеній! Правда, можно согласиться, что эти труды не пропали безъ всякой пользы и содѣйствовали теоріи ариѳметики и такъ называемой теоріи чиселъ, они заставили вникнуть въ разложеніе чиселъ на множителей и на слагаемыя и привели къ числовымъ рядамъ, которые теперь у насъ зовутся прогрессіями. Такъ древне происхожденіе прогрессій! У насъ онѣ отодвинуты на конецъ алгебры, а у древнихъ математиковъ имъ отводилось почетное мѣсто въ элементарной ариѳметикѣ.

Дѣленіе чиселъ на четныя и нечетныя извѣстно было еще въ древнемъ Египтѣ: оно же было вполнѣ извѣстно и Пиѳагору, потому что уже въ его времена была въ ходу игра «въ четъ и нечетъ». Кромѣ того, пиѳагорейцы раздѣлили числа на первоначальныя и составныя; первоначальными они называли, подобно намъ, такія числа, которыя не разлагаются на другихъ дѣлителей, а составными тѣ, которыя можно представить въ видѣ произведенія 2 множителей; и такъ какъ греки, любители и поклонники геометріи, смотрѣли и на ариѳметику со стороны геометрическихъ свойствъ, то они еще придумали называть первоначальныя числа линейными, а составныя плоскостными; дѣйствительно, всякое составное число, напр. 10, разлагается на 2 производителя, въ данномъ случаѣ на 2 и на 5, и потому можетъ обозначать собой площадь, хоть, напримѣръ, прямоугольника, у котораго стороны 2 и 5; первоначальныя же числа могутъ выражать собой только длину линіи, если, конечно, не вводить дробей.

Еще пиѳагорейцы выдѣлили треугольныя числа и квадратныя: треугольное число то, которое представляетъ собою половину произведенія 2 сосѣднихъ чиселъ, напр., 6 будетъ треугольнымъ числомъ, потому что его можно образовать умноженіемъ 3 на 4 и дѣленіемъ на 2; вотъ примѣры треугольныхъ чиселъ: $10 = \frac{4.5}{2}$, $15 = \frac{5.6}{2}$, $21 = \frac{6.7}{2}$, $28 = \frac{7.8}{2}$, $36 = \frac{8.9}{2}$, и т. д. Ясно, почему они заслужили такое названіе: они могутъ выражать собой площадь треугольника. Что значитъ квадратное число, легко догадаться: то число, которое составлено изъ 2-хъ равныхъ множителей: квадратныя числа слѣдующія: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49 и т. д.

Кромѣ того, у грековъ были *«совершенныя числа»*. Подъ этимъ именемъ разумѣлись такія, которыя равны суммѣ всѣхъ своихъ дѣлителей, считая единицу: самый легкій примѣръ совершеннаго числа —28, потому что 28=1+2+4+7+14: другимъ примѣромъ можетъ служить число 496: если сложить всѣхъ его множителей, считая и единицу, то въ суммѣ получимъ опять 496: множители слѣдующіе: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 62, 124, 248.

Отъ совершенныхъ чиселъ греки перешли къ такъ наз. содружественнымъ. Два числа называются содружественными тогда, когда каждое изъ нихъ равно суммѣ дѣлителей другого: лучшимъ примѣромъ такихъ чиселъ могутъ служить 220 и 284. у перваго изъ нихъ дѣлители 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110 даютъ вмѣстѣ 284, а у второго дѣлители 1, 2, 4, 71, 142 даютъ въ суммѣ число 220. Въ теоріи содружественныхъ чиселъ не обошлось безъ курьеза, опять проявилась та же наклонность къ таинственному и волшебному. Нѣкій Мадшрити, умершій въ Мадридѣ въ 1007 году по Р. Х., въ своемъ сочиненіи «О цѣляхъ существующаго» пытается увѣрить, что содружественныя числа могутъ сыграть роль талисмана или приворотнаго зелья; а способъ для этого очень простой: надо написать на 2 бумажкахъ, на одной число 220, на другой—284, сжечь ихъ и пепелъ выпить съ водой, большее число самому, а меньшее тому, кого желательно къ себѣ расположить. Другой авторитетный человѣкъ, нѣкто Ибн-халдунъ, подтверждаетъ, что дѣйствительно эти числа имѣютъ значеніе талисмановъ, и что многіе на дѣлѣ это испытали и увѣрились: и онъ самъ, Ибн-халдунъ, на своемъ опытѣ въ этомъ же увѣрился.

Все, изложенное выше, принадлежитъ, главнымъ образомъ, грекамъ, потому что всѣ эти подраздѣленія и всѣ формулы разрабатывались въ школѣ Пиѳагора и уже отъ позднѣйшихъ его учениковъ перешли къ арабамъ. Римляне не заносились такъ далеко въ своей фантазіи и предпочитали быть поближе къ практикѣ и наглядности: вычисляли они, какъ выше уже сказано, все больше по пальцамъ и даже ухитрялись отмѣчать на пальцахъ довольно большія числа; при этомъ единицы отмѣчались пальцами, а десятки до сотни—суставами пальцевъ, именно:

1—мизинецъ согнутъ,
2—четвертый и пятый пальцы согнуты,
3—третій палецъ согнутъ
и т. д.;

10—верхній суставъ указательнаго пальца прижатъ къ нижнему суставу большого пальца,

20—указательный палецъ протянутъ; большой палецъ приближается къ нижнему суставу указательнаго.

30—верхніе суставы большого и указательнаго пальца сближены

и т. д.

Подобная наклонность считать все по пальцамъ отразилась и на раздѣленіи чиселъ. Простыя единицы до 10-ти назывались у римлянъ пальцевыми (digiti), круглые десятки до сотни назывались суставными (articuli), и, наконецъ, всѣ остальныя числа носили названіе сложныхъ или сочиненныхъ (compositi).

Когда свѣтъ христіанства распространился изъ Рима на всю Западную Европу, то вмѣстѣ съ этимъ разлилась волна и римской образованности. Скудна была римская ариѳметика, но, за неимѣніемъ лучшей, она царила безраздѣльно во всей Европѣ до XIII—XIV вѣка, со своимъ абакомъ, римскими цифрами и пальцевымъ счетомъ. Скудна и бѣдна была теоретическая часть ариѳметики, но она цѣнилась тѣмъ выше, чѣмъ была бѣднѣе. Вслѣдствіе этого и раздѣленіе чиселъ на пальцевыя, суставныя и сочиненныя бережно хранилось, какъ что-то священное и чрезвычайно важное, и передавалось, отъ одного ученаго къ другому даже тогда, когда Европа ознакомилась съ арабской ариѳметикой, и дошло почти до нашихъ дней, по крайней мѣрѣ, проявляло признаки жизни въ XVIII вѣкѣ, когда пропалъ и абакъ и пальцевый счетъ. Римскія цифры оказались еще болѣе живучими, такъ что помѣщаются въ нашихъ ариѳметикахъ и проходятся въ школахъ по сегодняшній день. Въ послѣдній разъ мы видимъ пальпевыя, суставныя и сочиненныя числа въ славянской ариѳметикѣ Магницкаго (1703 г.). Въ ней говорится: «Персты: 1, 2, 3, 4, 5, 6 7, 8, 9, 0. Сія изображенія отъ многихъ называются персты, а толико ихъ числомъ, елико и перстовъ есть по разумѣнію нѣкоторыхъ. Составы: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 200. Сія числа имянуются составы, зане цифрою 0 всегда въ десятеро составляютъ. Сочиненіе: 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23, 25, 27. Сія числа сочиненія называются, понеже они изъ перстовъ и составовъ сочиняются». Какъ видимъ, въ этихъ объясненіяхъ недостаетъ убѣдительности, да и примѣры-то взяты непослѣдовательно и односторонне. Впрочемъ, авторъ добавляетъ еще объясненіе, которое, пожалуй, не столько уясняетъ, сколько запутываетъ: «Умствовати же вышеобъявленная перстовая, составная и сочиненная числа, въ сотни, въ тысящи и вящще, сочиненіе отъ правыя руки къ лѣвой изчисляя впредь въ десятеро».

Число и порядокъ дѣйствій, знаки и опредѣленія.

На вопросъ, сколько ариѳметическихъ дѣйствій, теперь всякій, даже недоучившійся въ школѣ, можетъ отвѣтить, что ихъ—четыре: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Но не всегда было такъ, прежде дѣйствій насчитывали больше: 5, 6, 7 и даже 9. Откуда же ихъ столько брали? Очевидно, изъ того же источника, т.-е. изъ ариѳметики, но съ раздѣленіемъ и дополненемъ. Во-первыхъ, нумерацію принимали за особое дѣйствіе и такимъ образомъ насчитывали 5. Во-вторыхъ, долгое время у большинства писателей выдѣлялись еще въ особыя правила удвоеніе и раздвоеніе. Выходитъ дѣйствій семь. Къ нимъ иногда присоединяли возвышеніе чиселъ въ степень и извлеченіе корня, и получалось 9.

Происходила эта путаница отъ того, что авторы никакъ не могли согласиться, что разумѣть подъ дѣйствіемъ. Мы разумѣемъ подъ нимъ составленіе новаго числа по даннымъ числамъ и потому не считаемъ нумерацію за дѣйствіе.

Удвоеніе числа и дѣленіе пополамъ издавна, съ глубокой древности, еще со временъ египтянъ, считалось не видомъ умноженія и дѣленія, а особымъ дѣйствіемъ. Впрочемъ, отъ египтянъ его переняли не столько римляне, сколько арабы. Поэтому въ борьбѣ новой арабской ариѳметики со старой римской, когда въ XIII—XIV вв. столкнулись латинская схоластика съ индусской математикой, удвоеніе и раздвоеніе стояли на знамени новой науки и усиленно рекомендовались въ качествѣ очень полезной и важной мѣры для лучшаго усвоенія дѣйствій. Ученый англичанинъ Сакро-Боско, жившій въ XIII столѣтіи, рекомендовалъ начинать дѣленіе пополамъ справа, т.-е. съ низшихъ разрядовъ, подобно сложенію и вычитанію, а удвоеніе—слѣва, съ высшихъ разрядовъ, какъ это дѣлалъ онъ и въ умноженіи вообще и въ дѣленіи. Сейчасъ намъ совершенно непонятно, какія такія удобства могли бы представиться, если бы начинать дѣленіе справа, а умноженіе слѣва; мы, по крайней мѣрѣ, стали бы производить эти дѣйствія совершенно наоборотъ. Навѣрное, такія же причины заставили и средневѣковыхъ математиковъ поглубже вдуматься, есть ли, дѣйствительно, польза отъ того, чтобы удвоеніе и раздвоеніе отличать отъ простого умноженія и дѣленія: пришлось сознаться, что это только частные случаи главныхъ дѣйствій; первый, кто авторитетно заявилъ объ этомъ, былъ итальянецъ Лука Пачіоло (1500 г.). Онъ перешелъ къ нашему обыкновенному способу дѣленія.

Возвышеніе чиселъ въ квадратъ и кубъ и извлеченіе корней считалось необходимой принадлежностью ариѳметики почти до самаго послѣдняго времени. Эти два правила помѣщались въ ариѳметикѣ до 50-хъ и даже 60-хъ годовъ истекшаго столѣтія. Теперь ихъ пропускаютъ, потому что, чтобы ихъ выяснить толково, надо знать алгебру, и слѣд. лучшее имъ мѣсто въ алгебрѣ.

Арабскій математикъ Аль-Ховаризми (въ IX в. по Р. Х.), въ честь котораго и вся система арабской ариѳметики получила названіе алгоритма, не считалъ нумерацію за дѣйствіе и принималъ только слѣдующія шесть: сложеніе, вычитаніе, дѣленіе пополамъ, удвоеніе, умноженіе и дѣленіе. Послѣдовательность дѣйствій у него, какъ видимъ, очень оригинальная, хотя ей нельзя отказать въ большой долѣ цѣлесообразности, въ смыслѣ перехода отъ легкаго къ болѣе трудному. Когда удвоеніе и раздвоеніе были оставлены, то многіе математики начали послѣ сложенія проходить прямо умноженіе, а потомъ ужъ вычитаніе съ дѣленіемъ. И они поступали въ этомъ случаѣ основательно, потому что умноженіе опирается на сложеніе, а дѣленіе можетъ приводиться къ повторительному вычитанію дѣлителя изъ дѣлимаго.

Въ только что минувшемъ XIX столѣтіи нѣкоторые нѣмецкіе педагоги придумали изъ одного дѣленія образовать 2 дѣйствія, именно, во-первыхъ, когда требуется раздѣлить число на нѣсколько равныхъ частей, и, во-вторыхъ, когда надо узнать, сколько разъ одно число содержится въ другомъ. Такое раздѣленіе надо признать излишнимъ, тутъ вовсе нѣтъ 2-хъ различныхъ дѣйствій, а есть только два вида одного дѣйствія, при чемъ въ первомъ видѣ отыскивается множимое по произведенію и множителю, а во второмъ—множитель по произведенію и множимому. Отдѣльные знаки для этихъ 2-хъ видовъ мы также полагали бы лишними: дѣлимъ ли мы, наприм., на пятерыхъ или дѣлимъ на пятки, и тутъ, и тамъ все дѣлимъ, поэтому и можно удовольствоваться однимъ знакомъ.

Поговоримъ теперь о знакахъ ариѳметическихъ дѣйствій и прежде всего отмѣтимъ, что потребность въ знакахъ начала чувствоваться такъ же давно, какъ и потребность въ цифрахъ. Какъ цифрами первоначально служили наглядныя фигуры и буквы алфавита, такъ и знаки образовались изъ чертежей и тоже буквъ. Еще древніе египтяне употребляли при сложеніи нѣчто въ родѣ нашего плюса. У грековъ знакомъ сложенія являлась косая черта, при вычитаніи писалась кавычка, и знакомъ равенства служила дуга (см. приложеніе 11-е въ концѣ книги). Позднѣе (въ IV в. по Р. Х.) Діофантъ Александрійскій, знаменитый греческій геометръ, ввелъ вмѣсто знака равенства букву ι, начальную букву слова «ἴσοι», что значитъ «равны». Арабы вовсе не употребляли знака сложенія въ томъ случаѣ, когда количества писались рядомъ, потому что, дѣйствительно, здѣсь можно подразумѣвать сложеніе само собой. Знакъ вычитанія у нихъ писался въ видѣ цѣлаго слова, которое, въ переводѣ на русскій языкъ, значитъ «безъ». Вычитаемое арабы ставили налѣво, а уменьшаемое направо, потому что они, подобно всѣмъ семитическимъ народамъ, располагали слова отъ правой руки къ лѣвой, а не отъ лѣвой къ правой, какъ мы. Знакомъ равенства у нихъ было S: это есть послѣдняя буква слова «равняется». Нашъ настоящій знакъ равенства введенъ въ алгебру Робертомъ Рекордомъ въ 1556 году. Косой крестъ при умноженіи окончательно предложенъ Уттредомъ въ 1631 году. Но и до него этотъ знакъ употреблялся очень часто и считался очень удобнымъ, потому что онъ указывалъ не только дѣйствіе, но и порядокъ дѣйствія. Именно, старинный употребительный способъ умноженія былъ способъ «крестика», въ такомъ родѣ: $\begin{matrix}26\\ \times\\ 34\end{matrix}$ Чтобы умножить 26 на 34, брали 4 отдѣльныхъ произведенія: 20×4, 6×30, 6×4, 20×30, изъ нихъ два вертикально и два крестъ накрестъ. Этотъ способъ иначе назывался хіазмомъ, потому что косой крестъ походитъ на греческую букву χ (хи), и самый знакъ умноженія назывался иногда «хи». Замѣчательно, что онъ же продолжительное время служилъ и знакомъ дѣленія дробей, такъ какъ въ этомъ случаѣ тоже приходится выполнять дѣйствіе крестъ накрестъ: числителя одной дроби помножать на знаменателя другой. Христіанъ Вольфъ въ XVIII ст. предложилъ обозначать умноженіе точкой. Наши знаки плюсъ и минусъ въ ихъ нормальной формѣ встрѣчаются въ первый разъ около 1489 г. въ ариѳметикѣ Лейпцигскаго профессора Видмана. Съ 1600 г. уже во всѣхъ четырехъ дѣйствіяхъ можно видѣть настоящіе знаки.

Теперь поведемъ рѣчь объ опредѣленіяхъ дѣйствій. Что показываетъ опредѣленіе? Оно указываетъ смыслъ дѣйствія и его сущность. Такъ, напр., опредѣленіемъ умноженія цѣлыхъ чиселъ служитъ слѣдующее: «умноженіемъ называется такое ариѳметическое дѣйствіе, въ которомъ составляется сумма столькихъ слагаемыхъ, равныхъ первому данному числу, сколько единицъ заключается во второмъ данномъ числѣ». Надо сказать, что опредѣленія въ первоначальной арабской ариѳметикѣ были короткими и понятными и употреблялись только тогда, когда въ нихъ дѣйствительно являлась надобность, т.-е. когда дѣйствіе безъ опредѣленія представлялось неяснымъ и смѣшивалось съ другимъ. Но, въ противоположность этому, средневѣковая школьная ученость (такъ назыв. схоластика) начала придавать словеснымъ опредѣленіямъ слишкомъ большое значеніе, начала требовать опредѣленій даже и въ тѣхъ случаяхъ, когда и безъ нихъ понятія ясны, просты и не смѣшиваются. Къ этому еще присоединилось увлеченіе мнимо-научнымъ языкомъ, когда стремились нарочно выражаться туманно, тяжеловѣсно, нагромождая фразу на фразу, и все это съ цѣлымъ рядомъ придаточныхъ предложеній, въ грудѣ которыхъ нерѣдко было трудно дойти до истиннаго смысла. Излишнія и тяжело выраженныя опредѣленія не мало мучили учащихся: средневѣковая варварская латынь и хитроумная риторика ложились тяжелымъ бременемъ на умственныя силы учениковъ и мало содѣйствовали уясненію основныхъ математическихъ понятій. И въ наши дни замѣтно еще нѣкоторое вліяніе средневѣковой схоластики, особенно въ нѣмецкой школѣ. Недаромъ знаменитый русскій педагогъ Ушинскій говоритъ: «Для нѣмца недостаточно понимать вещь: но ему непремѣнно нужно опредѣлить ее и дать ей мѣсто въ системахъ своихъ знаній. Опредѣленіями пустѣйшихъ и ничтожнѣйшихъ предметовъ набиты книги нѣмецкихъ учебниковъ. Безъ опредѣленія для нѣмца и вещь не вещь».

Приведемъ нѣсколько примѣровъ, которые доказываютъ, какъ иногда трудны и безполезны бываютъ опредѣленія. Въ русской ариѳметикѣ Румовскаго (1760 г.) относительно дѣленія сказано такъ: «Дѣленіе есть способъ изъ данныхъ двухъ чиселъ D и M находить третіе E, въ которомъ бы столько разъ содержалась единица, сколько разъ одно изъ данныхъ двухъ чиселъ D въ другомъ данномъ M содержится». Какъ это мудрено и непонятно, хотя съ научной точки зрѣнія и правильно! Можно думать, что авторъ нарочно, съ цѣлью, такъ затемнилъ смыслъ яснаго дѣйствія дѣленія: вѣдь пятилѣтніе ребята, если имъ дать яблоко и велѣть раздѣлить поровну, напр., пополамъ, поймутъ, чего отъ нихъ хотятъ, и съ удовольствіемъ рѣшатъ задачу, но авторъ этой ариѳметики, должно-быть, думаетъ, что трудный слогъ содѣйствуетъ научности: напрасно: научность состоитъ въ глубокихъ мысляхъ, а не въ туманныхъ фразахъ. Вотъ еще опредѣленія Грамматеуса (XVI в.): «Сложеніе, или суммированіе, показываетъ сумму нѣсколькихъ чиселъ. Умноженіе, или увеличеніе, описываетъ, какъ умножать одно число на другое или увеличивать. Вычитаніе, или отниманіе, открываетъ, какъ число вычитать, или какъ одно число отнимать отъ другого, чтобы видѣть остатокъ». Здѣсь только одна замѣна словъ и нѣтъ никакой помощи для смысла.

Сложеніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ.

Это дѣйствіе безспорно и безъ всякаго сомнѣнія занимаетъ первенствующее мѣсто въ ряду четырехъ дѣйствій, потому что безъ сложенія не обойтись нигдѣ. «Что есть аддиціо или сложеніе?» спрашиваетъ славянскій учебникъ ариѳметики и отвѣчаетъ: «Аддиціо или сложеніе, есть дву или многихъ числъ во едино собраніе, или во единъ перечень совокупленіе». И продолжаетъ сейчасъ же за этимъ: «Удобнѣйшаго же ради, и скораго сложенія, подобаетъ прежде предложенную таблицу имѣти въ разумѣ твердо, да всякихъ числъ сложеніе творити имаши скоро и извѣстно, безъ всякаго забвенія и лжи». Табличку надо было выучить непремѣнно наизусть и помнить ее твердо, твердо, иначе все ариѳметическое зданіе могло бы рушиться, потому что въ старинныя времена оно гораздо болѣе основывалось на чистомъ запоминаніи, чѣмъ на сужденіи и выводѣ. Учителя крѣпко убѣждаютъ помнить табличку, и вотъ даже стихи въ одной изъ ариѳметикъ:

«Къ двумъ единъ то есть три
Два же къ тремъ пять смотри
Такъ и все назирай
Таблицу разбирай.
Хотяй же не лгати
Похвально слагати,
Да тщится познати,
И устно сказати».

Въ нашихъ нынѣшнихъ учебникахъ ариѳметики таблица сложенія начинается съ 1+1 и кончается 9+9. Но прежде было иначе. Напр., въ ариѳметикѣ Леонардо Фибоначчи (1200 г.), первомъ европейскомъ учебникѣ, составленномъ по арабскому образцу, рекомендуется заучить не только таблицу единицъ, но и цѣлую таблицу десятковъ отъ 10+10 до 90+90. Здѣсь, конечно, видна непослѣдовательность: если учить десятки, то отчего же не учить сотни, тысячи и всѣ остальные разряды. Въ противоположность такой большой таблицѣ, русскіе учебники XVII в. даютъ таблицу маленькую, которая кончается всего на всего суммой 11, а до 18-ти не доходитъ.

Заглавіе этой таблицы такое: «Граница изустная счетная къ разуму хотящему разумѣти благая и полезная». Подобныхъ высокопарныхъ выраженій цѣлая тьма въ старинныхъ ариѳметическихъ пособіяхъ.

Сложеніе большихъ чиселъ, особенно же многозначныхъ чиселъ издавна производилось гораздо чаще на счетныхъ приборахъ, чѣмъ письменно. Разныя наглядныя пособія для счета и придумывались, главнымъ образомъ, для того, чтобы помочь сложенію. У китайцевъ—сванъ-панъ, у грековъ и римлянъ—абакъ, у насъ, русскихъ, торговые счеты, да кромѣ того, еще нѣсколько видоизмѣненій этихъ приборовъ— все это служило цѣлямъ отысканія суммы. И надо сказать, что привычка складывать на приборахъ очень укоренилась въ простомъ народѣ во всѣхъ почти странахъ и при томъ настолько сильно, что, напримѣръ, римскій абакъ употреблялся для сложенія въ Западной Европѣ столѣтія 3 - 4 спустя послѣ введенія индусской системы.

Способомъ, переходнымъ отъ абака къ нашему настоящему, является такой. Положимъ, даны намъ два числа: 666 и 144; подписавши 144 подъ 666 и опредѣливъ сумму единицъ 10, мы стираемъ 6 у верхняго слагаемаго и пишемъ вмѣсто него 0, а такъ какъ сумма единицъ дала десятокъ, то и цифру десятковъ 6 стираемъ и пишемъ 7, теперь слагаемыя измѣнились: 670 и 144; десятковъ въ суммѣ получится 11, слѣдовательно стираемъ 7 и замѣняемъ черезъ 1 и также вмѣсто 6-ти сотенъ пишемъ 7; теперь намъ остается только сложить 7 сотенъ съ 1, будетъ 8; эта цифра пишется вмѣсто 7 сотенъ, и весь отвѣтъ получается на мѣстѣ перваго слагаемаго въ видѣ 810. Пять разъ намъ приходилось стирать, прежде чѣмъ добраться до вѣрнаго отвѣта. Несомнѣнно, такимъ путемъ трудно дѣйствовать на бумагѣ, но онъ былъ умѣстенъ на абакѣ, покрытомъ пескомъ; еще можно попытаться на грифельной доскѣ, но эти постоянныя стиранія надоѣдаютъ; почему же они примѣнялись и на бумагѣ? вѣдь отъ нихъ нѣтъ никакой выгоды и одно только неудобство? А потому, что прежняя метода обученія стремилась обратить человѣка въ машину, не полагалась на его личную сообразительность и предписывала все отмѣчать на абакѣ, но никакъ не удерживать въ умѣ. Мы теперь запоминаемъ десятки или сотни, получившіяся отъ единицъ или десятковъ, а тогда всѣ мелочи необходимо было писать, чтобы не утерять.

Механическій характеръ цифрового сложенія, безъ всякаго пособія устнаго счета, ясно проглядываетъ у большинства средневѣковыхъ писателей. Магометъ Бэга-эддинъ (XVI в.) подписываетъ слагаемыя правильно одно подъ другимъ и складываетъ единицы опять же правильно, но когда изъ нихъ образуется десятокъ, то онъ не знаетъ, что съ нимъ дѣлать, и пока до поры до времени записываетъ его надъ десятками; далѣе ведетъ сложеніе десятковъ и, только получивъ ихъ сумму, онъ вспоминаетъ про десятокъ, образовавшійся изъ единицъ и тутъ его прикладываетъ. Сложеніе другихъ разрядовъ идетъ подобнымъ образомъ. Примѣръ:

1 1 1 1
53739
28265
71994
8200

Вотъ каково недовѣріе къ соображенію учениковъ и какая подробная механичность.

Въ этомъ родѣ, иногда съ небольшими улучшеніями, составленъ рядъ учебниковъ по ариѳметикѣ въ XVI—XVIII вв. Въ нихъ даются пространныя правила, какъ надо располагать слагаемыя и какъ замѣчать цифры. Эти правила нисколько не объясняются, и вычисляющій долженъ работать съ ними, какъ машина. Напр., Грамматеусъ, составитель нѣмецкаго учебника XVI в., даетъ 3 такихъ правила: 1-е: Смотри тщательно, чтобы цифры стояли какъ разъ одна надъ другой, такъ, чтобы 1-ая стояла надъ 1-ой, 2-ая надъ 2-ой и т. д.; проведи подъ этимъ линію, подъ которой и надо писать сумму. 2-е правило: Начинай съ правой руки, сложи всѣ числа, которыя стоятъ на первомъ мѣстѣ: если получится отъ сложенія двѣ цифры, то первую напиши, а вторую удержи въ умѣ, съ тѣмъ, чтобы прибавить ее къ слѣдующей: такъ же поступай и со всѣми остальными. 3-е правило: Въ концѣ ничего не надо держать въ умѣ, но все надо писать. Все время употребляй слова «и» или «да», напримѣръ, три да четыре—семь.

Въ настоящее время способъ сложенія тотъ же, что и въ старину. Правда, мы всегда начинаемъ дѣйствіе съ правой руки, когда вычисляемъ письменно, въ старину же дѣлали и съ лѣвой. Кромѣ того, наши ученики нерѣдко относятся совершенно сознательно къ дѣйствію и понимаютъ, что и для чего дѣлается. Но въ общемъ характеръ сложенія не измѣнился съ самыхъ тѣхъ поръ, какъ установилась *индусская система съ ея нулемъ и значеніемъ цифръ по* мѣсту, ими занимаемому.

Нѣкоторыя особенности можно отмѣтить только въ слѣдующихъ трехъ пріемахъ, которые принадлежатъ индусамъ, арабамъ и грекамъ.

Арабскій ученый Алькальнади (XV в.) совѣтуетъ писать сумму надъ слагаемыми, а внизу помѣщать тѣ цифры, которыя мы обыкновенно держимъ въ умѣ. Напримѣръ, дано сложить 48 съ 97-ю. Получится такое вычисленіе:

145
97
48
1

Такое записываніе довольно неудобно, потому что при немъ необходимо впередъ приготовить мѣсто для суммы.

Греческій монахъ Максимъ Планудесъ (XIV в.), единственный представитель математическихъ знаній во весь византійскій періодъ греческой исторіи и къ тому же ученый не самостоятельный, а черпавшій свои пріемы изъ арабскихъ источниковъ, предлагаетъ записывать сумму надъ слагаемыми, а не подъ ними, въ остальномъ же его способъ сходенъ съ нашимъ.

Индусы, какъ болѣе всего расположенные къ устному счету, вводили въ сложеніе, сравнительно съ другими народами, менѣе механичности и старались развивать въ ученикахъ сообразительность, быстроту вычисленій и умѣнье упрощать дѣйствія. При многозначныхъ числахъ они писали слагаемыя въ строку и складывали ихъ по разрядамъ. $365+867+992$ индусы вычисляли такъ: $5+7+2=14$, $6+6+9=21$, $3+8+9=20$; всего 2224. Такъ идетъ дѣло у индусскаго писателя Баскары (XII в. по Р. X.).

Заканчивая эту главу, упомянемъ еще о терминахъ сложенія, т.-е. о названіи дѣйствія и объ именахъ данныхъ и искомыхъ при немъ чиселъ. Средневѣковая ариѳметика вводила массу терминовъ. Такъ, вмѣсто «сумма», говорилось еще: аггрегатъ, коллектъ, продуктъ. Вмѣсто «сложить», итальянскій ученый Тарталья приводитъ цѣлыхъ 12 терминовъ. Въ старинныхъ русскихъ ариѳметикахъ слагаемыя *назывались перечнями, а сумма—исполнимъ большимъ перечнемъ*, очевидно, потому, что принято было писать ее внизу, подъ малыми перечнями.

Вычитаніе цѣлыхъ отвлеченныхъ чиселъ.

До настоящаго времени извѣстно всего на всего 5 способовъ письменнаго вычитанія многозначныхъ чиселъ, считая въ томъ числѣ и тотъ, который у насъ общепринятъ теперь. Начнемъ съ него. Мы производимъ письменное отниманіе отъ правой руки къ лѣвой, чтобы удобнѣе было занимать, а это приходится дѣлать всякій разъ, когда какой-нибудь разрядъ вычитаемаго не отнимается отъ разряда уменьшаемаго. Въ противоположность этому порядку, арабскій математикъ Бенъ-Муза, жившій при дворѣ халифа Аль-Мамума въ IX в. по Р. Х., *настаиваетъ на вычитаніи съ высшихъ разрядовъ, т.-е. отъ лѣвой* руки къ правой; причины онъ не объясняетъ, а просто говоритъ «такъ полезнѣе и легче». Вовсе не легче, прибавимъ мы отъ себя, потому что, если случается занимать, то нужно бываетъ перетирать цифры. Впрочемъ, весьма возможно, что Бенъ-Муза вычислялъ на пескѣ, на абакѣ, и ему ничего не стоило перемѣнить лишній разъ цифру: но очень неразсчетливо поступаютъ тѣ авторы, которые ведутъ вычисленія на бумагѣ, а правила даютъ такія, какія пригодны только для абака: вѣдь на абакѣ все можно стереть и все замѣнить новымъ, а на бумагѣ постоянныя перечеркиванья приводятъ къ путаницѣ, сбивчивости и къ лишнимъ усложненіямъ. Вотъ примѣръ, взятый изъ одного нѣмецкаго сборника XIII вѣка. Дается вычесть 144 изъ 810; отнимаемъ 4 отъ 810, получится 806: при этомъ цифры 1 и 0 мы замѣняемъ цифрами 0 и 6. Далѣе, вычитаемъ 4 десятка изъ 0, надо занять сотню, остатокъ будетъ всего 766; при этомъ цифры 8 и 0 замѣнились другими: 7 и 6. Когда, наконецъ, вычтемъ 100 изъ 766, то получимъ искомый отвѣтъ 666. Такимъ путемъ послѣ трехъ измѣненій цифръ приходимъ мы къ отвѣту 666

Максимъ Планудесъ, византійскій математикъ XIV вѣка, вычитаетъ точно такъ, какъ мы, но пишетъ всѣ вычисленія гораздо подробнѣе, такъ какъ не надѣется на устный счетъ и приводитъ все дѣло къ механическому записыванію. Если бы потребовалось вычесть 26158 изъ 35142, то по Планудесу мы, во-первыхъ, должны были бы остатокъ записать вверху, надъ чертой, точно такъ, какъ и сумму, онъ же рекомендуетъ писать вверху надъ слагаемыми:

08984
24031
35142
26158;

во-вторыхъ, надъ уменьшаемымъ появляется какой-то странный рядъ цифръ 24031. Объясняется онъ такъ. Когда мы начинаемъ дѣйствіе справа и хотимъ вычесть 8 изъ 2, то, конечно, намъ вычесть нельзя, и мы должны къ 2 единицамъ еще занять 1 десятокъ изъ 4-хъ; вотъ этотъ-то одинъ занятой десятокъ и пишется надъ цифрой единицъ и образуетъ вмѣстѣ съ ней 12: 8 изъ 12=4, слѣдовательно, простыхъ единицъ въ отвѣтѣ 4. Вычитая далѣе десятки, мы должны считать ихъ въ уменьшаемомъ не 4, а 3, такъ какъ одинъ десятокъ раздробленъ въ простыя единицы: и вотъ, чтобы не сбиться, Планудесъ ставитъ надъ цифрой десятковъ 4 новую цифру 3 и продолжаетъ находить отвѣтъ такъ же для сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ. Изъ этого видно, что рядъ цифръ 24031 представляетъ собою исправленные разряды числа, когда въ нихъ произошло занимманіе.

Во всѣхъ разобранныхъ примѣрахъ, начиная съ Бенъ-Музы, проявляется, несмотря на видимое разнообразіе подробностей, одинъ и тотъ же основной пріемъ, и очевидно тотъ самый, который примѣняется и въ нашемъ настоящемъ способѣ вычитанія. Это не важно, съ какой руки начинать дѣйствіе, и гдѣ записывать цифры, которыя мы привыкли держать въ умѣ, но важно то, какъ производить занимманіе, потому что оно составляетъ самое трудное и сбивчивое мѣсто во всемъ вычитаніи. Во всѣхъ примѣрахъ, взятыхъ выше, занимманіе производилось нормальнымъ путемъ: если, напр., единицъ внизу больше, чѣмъ вверху, то берется десятокъ, прикладывается къ единицамъ, и такимъ образомъ дѣйствіе становится возможнымъ. Въ виду одинаковости занимаія, мы относимъ всѣ предыдущіе примѣры къ одному виду, или способу, который мы и называемъ первымъ способомъ вычитанія.

Чтобы объяснить второй способъ, беремъ примѣръ: 5975—497. Такъ какъ 7 изъ 5 не отнимается, то отнимаемъ 7 изъ 15, будетъ 8. Но, вычитая 7 изъ 15-ти вмѣсто 5-ти, мы этимъ къ уменьшаемому прибавляемъ лишній десятокъ, такъ какъ въ немъ простыхъ единицъ всего только 5, а мы говоримъ 15. Но не будемъ занимать этого десятка отдѣльно въ десяткахъ уменьшаемаго, потому что такимъ путемъ мы опять придемъ къ 1-му способу; вмѣсто того, мы отнимаемъ этотъ занятой десятокъ отъ 7 десятковъ уменьшаемаго тогда, когда будемъ отнимать десятки вычитаемаго, и намъ вмѣсто 9 придется отнять 10 десятковъ; такъ какъ 10 изъ 7-ми не вычитается, то надо занять сотню; ее мы опять-таки не будемъ занимать отдѣльно и не будемъ отнимать прямо изъ 9 сотъ уменьшаемаго, а вычтемъ вмѣстѣ съ 4-мя стами. Тогда, отнявши отъ 9 сотъ 5, получимъ 400. Теперь легко понять, чѣмъ отличается второй способъ вычитанія отъ перваго. По второму способу тотъ десятокъ или та сотня, которые мы занимаемъ, не отнимаются сейчасъ же отъ десятковъ или сотенъ уменьшаемаго, а придаются къ десяткамъ или сотнямъ вычитаемаго, и тогда уже вычитаются вмѣстѣ съ ними; слѣдовательно, не цифры уменьшаемаго понижаются на единицу, а наоборотъ цифры вычитаемаго повышаются на единицу, если только, конечно, изъ соотвѣтствующаго разряда занимаютъ. Вотъ еще примѣръ: 1236—879. Рѣшеніе: 9 изъ 16-ти—7, 8 изъ 13-ти—5, 9 изъ 12-ти—3, всего 357. Чтобы отмѣтить, какія цифры вычитаемаго повышаются, надъ ними ставятъ точки. Этотъ второй способъ получилъ начало уже давно, еще со времени М. Планудеса и ранѣе, примѣняется же онъ теперь иногда во французскихъ школахъ. Въ немъ видятъ даже нѣкоторое удобство, сравнительно съ нашимъ пріемомъ, потому что въ немъ занятая единица всегда прикладывается, а у насъ отнимается, прикладывать же вообще проще и естественнѣе, чѣмъ отнимать, такъ какъ и сама ариѳметика начинается съ элементарнаго прикладыванія, т.-е. счета по единицѣ. Но, разумѣется, эта выгода довольно призрачная, и все дѣло зависитъ отъ привычки: насъ пріучали съ малыхъ лѣтъ ставить точку надъ уменьшаемымъ, а не надъ вычитаемымъ, и это насъ не затрудняетъ, а даже кажется болѣе легкимъ.

Третій способъ, предложенный Адамомъ Ризе, нѣмецкимъ педагогомъ XVI вѣка, примыкаетъ къ первому. Объяснимъ его на примѣрѣ: 85322—67876. Ведемъ вычитаніе съ простыхъ единицъ. По обыкновенному пріему надо бы 6 вычесть изъ 12-ти, а мы по этому третьему способу вычтемъ 6 не изъ 12-ти, а изъ 10-ти, и этотъ 1 десятокъ занимаемъ у 2 десятковъ уменьшаемаго. 6 изъ 10 составитъ 4, да 2 единицы въ уменьшаемомъ, всего будетъ 6. Далѣе вычитаемъ десятки. Такъ какъ 7 не вычитается изъ двухъ, или вѣрнѣе изъ одного, потому что одинъ десятокъ мы уже заняли, то надо намъ занять сотню и раздробить ее въ десятки; сотня дастъ 10 десятковъ, вычтемъ изъ нихъ 7, тогда получимъ въ разности 3; да еще въ уменьшаемомъ 1 десятокъ, итого накопится въ остаткѣ 4. Такъ же поступаемъ и съ остальными разрядами: 10—8=2, да 2, всего 4 сотни; 10—7=3, да 4 тысячи, всего 7 тысячъ; 10—6=4, да 8, всего 12 десятковъ тысячъ: но изъ этихъ 12 десятковъ тысячъ надо исключить 1 сотню тысячъ, потому что мы ее какъ бы заняли, а между тѣмъ занять-то было не у чего, то мы ее теперь и счеркиваемъ у остатка. Выводъ относительно третьяго способа получается слѣдующій. Онъ основанъ на отниманіи каждаго разряда вычитаемаго отъ 10-ти и прибавленіи разрядовъ уменьшаемаго, а такъ какъ разность между какимъ-нибудь однозначнымъ числомъ и десятью называется дополненіемъ этого числа до 10-ти, то способъ Адама Ризе можно еще выразить такъ: къ разрядамъ уменьшаемаго надо прикладывать дополненія разрядовъ вычитаемаго до 10-ти. Еще примѣръ:

$$\begin{array}{r} 19033091 \\ \underline{2785306} \\ 16247785 \end{array}$$

Рѣшается онъ такъ: 4, дополненіе 6-ти до 10-ти, да 1, будетъ 5; 10, дополненіе нуля до 10-ти, да 8, потому что 1 занята, составитъ 18, изъ нихъ 8 пишемъ, а 1 сотню отбрасываемъ, потому что, когда мы брали дополненіе, то для этого намъ необходимо было имѣть сотню, а такъ какъ мы ея не занимали въ уменьшаемомъ, то и счеркиваемъ ее въ остаткѣ. Такъ же поступать надо и въ другихъ подобныхъ случаяхъ, именно когда дополненіе вычитаемаго вмѣстѣ съ разрядомъ уменьшаемаго дастъ болѣе 10-ти, то десятокъ счеркивается. Способъ Адама Ризе былъ знакомъ его современникамъ, но особаго развитія и распространенія онъ не получилъ. Онъ очень напоминаетъ новый, пятый способъ, который помѣщаемъ ниже.

Четвертое правило вычитанія принадлежитъ арабскому ученому Алькальцади изъ Андалузіи (XV в.). Чтобы, напримѣръ, вычесть 287 изъ 573, надо сперва 7 простыхъ единицъ вычесть изъ 3-хъ. Конечно, 7 изъ 3-хъ не вычитается, но прежде чѣмъ занимать десятокъ, Алькальцади задается вопросомъ: много ли недостаетъ къ тремъ для того, чтобы изъ нихъ можно было вычесть семь? Оказывается, недостаетъ четырехъ. И вотъ мы занимаемъ теперь десятокъ изъ 7 десятковъ, раздробляемъ его въ единицы и вычитаемъ столько, сколько не хватало, т.-е. 4, въ остаткѣ будетъ 6. Такимъ же образомъ идетъ вычисленіе и съ десятками, и съ сотнями: 8 изъ 6, недостаетъ двухъ, вычитаемъ 2 изъ 10-ти, будетъ 8 десятковъ; наконецъ, 2 сотни изъ 4 сотенъ дадутъ 2 сотни, всего 286.

Связь между способами первымъ, третьимъ и четвертымъ мы представимъ для ясности еще разъ на двузначныхъ числахъ. Возьмемъ 41—27. По первому способу необходимо 7 вычитать изъ 11-ти, по третьему 7 вычитается изъ десяти, и къ полученному прибавляется 1, а по четвертому изъ 10-ти вычитается недостатокъ единицы противъ 7-ми. Что касается второго способа, то въ немъ, какъ и въ первомъ, 7 вычитается изъ 11-ти, но за то потомъ, когда идетъ отниманіе десятковъ, не 2 десятка отнимается изъ 3-хъ, а 3 изъ 4-хъ.

Пятый и послѣдній способъ сходенъ по своей основной мысли со способомъ Адама Ризе. Въ немъ прибавляется къ разрядамъ уменьшаемаго дополненіе разрядовъ вычитаемаго, при чемъ дополненіе берется то до 10-ти, то до 9-ти: до десяти тогда, когда надъ цифрой уменьшаемаго не стоитъ точки, которая бы показывала, что здѣсь единица занята, а до 9-ти тогда, когда стоитъ точка. Примѣръ: 731—264. Чтобы произвести это вычитаніе по пятому способу, прибавляемъ къ одной простой единицѣ уменьшаемаго 6, т.-е. дополненіе 4-хъ единицъ вычитаемаго до 10-ти; получится 7. Далѣе беремъ десятки: 3 да 3 составитъ 6, при чемъ вторая тройка представляетъ собой дополненіе 6 десятковъ вычитаемаго до 9-ти, а до 9-ти потому, что надъ десятками уменьшаемаго стоитъ точка, какъ знакъ занимания. Наконецъ, опредѣляемъ сотни: 7 да 7-мь 14, 4 беремъ, а 1 скидываемъ. Окончательный отвѣтъ будетъ 467. Теперь надо объяснить, почему мы такъ дѣлаемъ, и на чемъ основанъ этотъ способъ. Намъ требовалось отнять 264, а мы не только не стали отнимать, но даже начали прикладывать и приложили всего 7 сотенъ 3 десятка 6 единицъ. На сколько жъ мы ошиблись, благодаря тому, что вмѣсто отниманія 264-хъ прибавили 736? Очевидно, на 736+264, т. е. ровно на тысячу.

Эту свою ошибку мы и исправляемъ въ самомъ концѣ, отчеркивая у отвѣта тысячу. Если бы намъ данъ былъ примѣръ 34985322—12467876, то вычисленіе получилось бы такое: 2+4=6, 2+2=4, 3+1=4, 5+2=7, 8+3=11, изъ этого лѣвая единица скидывается, 9+6=15, 4+8=12, 3+9=12, всѣ лѣвыя единицы скидываются. Если нужно дѣйствіе производить поскорѣе, то лучше точки ставить не надъ уменьшаемымъ, а надъ вычитаемымъ. И вообще этотъ пятый способъ напоминаетъ собою второй способъ тѣмъ, что занимаемую единицу можно считать приложенной къ вычитаемому, а не отнятой отъ уменьшаемаго.

Таблица умноженія.

Твердое знаніе таблицы умноженія издавна требовалось отъ учениковъ и считалось совершенно необходимымъ. Составителемъ таблицы называютъ греческаго математика Пиѳагора или, вѣрнѣе, одного изъ его позднѣйшихъ учениковъ, ново-пиѳагорейца Никомаха (въ I ст. по Р. Х.). Начиная съ Никомаха ни одинъ авторъ не забываетъ напоминать, что «преимущественно передъ всѣмъ слѣдуетъ хорошо знать таблицу». Авторы старинныхъ русскихъ математическихъ сборниковъ также помѣщаютъ таблицу, или «границу умножалную» подъ титуломъ «границa изустная большему счету разумъ подаетъ хотящему въ нея зрѣти»: они тоже требуютъ заучиванія: надобе сіи изустныя слова памятовати и въ памяти крѣпко держати, всегда во устѣхъ обносити, чтобы во умѣ незабыты были». Вотъ стихи изъ Магницкаго:

«Аще кто не твердитъ,
Таблицы и гордитъ
Не можетъ познати,
Числомъ что множати.
И во всей науки,
Не свободъ отъ муки.
Колико ни учитъ
Туне ся удручитъ.
И въ пользу не будетъ,
Аще ю забудетъ».

Въ римскихъ школахъ таблицу заучивали хоромъ на распѣвъ.

Въ нашихъ современныхъ учебникахъ по ариѳметикѣ таблица умноженія содержитъ въ себѣ обыкновенно произведенія всѣхъ однозначныхъ чиселъ, начиная съ 2×2 и кончая 9×9. Въ средніе вѣка смотрѣли на это дѣло иначе; тогда и въ ариѳметикѣ, и въ другихъ наукахъ давали большой просторъ памяти, а поэтому заучиваніе примѣняли широко; требованія въ этомъ отношеніи простирались такъ далеко, что ученики обязаны были запоминать произведенія всѣхъ первыхъ сорока чиселъ на однозначныхъ множителей, слѣдовательно 360 произведеній, кромѣ того, квадраты всѣхъ чиселъ, выраженныхъ полными десятками, кончая 90×90, и произведенія всѣхъ однозначныхъ чиселъ на полные десятки, кончая 9×90. Всего набирается болѣе 400 произведеній. И такую то массу должна была поглотить память учащихся! Сколько же труда и сколько времени надо было истратить на это! Вѣдь учили прямо наизусть, безъ всякихъ разъясненій и въ громадномъ большинствѣ случаевъ безъ всякаго пониманія. Трудно и теперь ребятамъ, когда ихъ заставляютъ заучивать таблицу умноженія, не напрактиковавши ихъ, какъ она составляется; но неизмѣримо труднѣе приходилось ученикамъ средневѣковой школы, въ которой требовали гораздо больше, а давали гораздо меньше *).

Римляне, чтобы облегчить себѣ перемноженіе чиселъ, содержащихъ много разрядовъ, пользовались длиннѣйшими таблицами умноженія, въ которыхъ множителями служили всѣ числа до извѣстнаго предѣла. Съ такими таблицами—ихъ, конечно, не заучивали, а только держали всегда записанными подъ рукой — римляне довольно быстро вычисляли сложныя и трудныя произведенія.

Письменно таблица представляется въ различныхъ формахъ. Изъ

*) Бельдоманди, итальянскій математикъ (1380—1428), помѣщаетъ въ своей рукописной ариѳметикѣ таблицу умноженія всѣхъ чиселъ въ предѣлѣ 22-хъ. По его словамъ, надо бы пойти и дальше, да листа не хватаетъ.

нихъ самая общеизвѣстная—Пиѳагорова таблица: ея мы не помѣщаемъ, она есть въ каждомъ учебникѣ. Но есть еще фигура треугольника.

1								
2	4							
3	6	9						
4	8	12	16					
5	10	15	20	25				
6	12	18	24	30	36			
7	14	21	28	35	42	49		
8	16	24	32	40	48	56	64	
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Французскій математикъ Chuquet (1484 г.) представляетъ таблицу умноженія въ такой формѣ:

1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0
2	2	3	4	5	6	7	8	9	0	
	4	6	8	10	12	14	16	18	0	
3	3	4	5	6	7	8	9	0		
	9	12	15	18	21	24	27	0		
4	4	5	6	7	8	9	0			
	16	20	24	28	32	36	0			
5	5	6	7	8	9	0				
	25	30	35	40	45	0				
6	6	7	8	9	0					
	36	42	48	54	0					
7	7	8	9	0						
	49	56	63	0						
8	8	9	0							
	64	72	0							
9	9	0								
	81	0								
0	0									
	0									

Про то, какъ составляется обыкновенная таблица умноженія, говорилось подробно въ большинствѣ учебниковъ и объяснялось нѣсколькими, иногда многими способами. Но пропускался самый главный и простой способъ, когда таблицу составляютъ послѣдовательнымъ сложеніемъ, или набираніемъ. Вмѣсто него приводились такіе запутанные и искусственные пріемы, что, дѣйствительно, гораздо легче было выучить таблицу наизусть, не понимая ея, чѣмъ запомнить эти пріемы и особенно понять ихъ; они представляли изъ себя не столько ариометическое содержаніе, сколько алгебраическія формулы и помѣщались, какъ видно, больше для того, чтобы придать курсу серьезную, научную окраску. Между прочимъ, встрѣчаемъ въ старыхъ ариометикахъ такое правило: «умножь перваго производителя на 10 и вычти отсюда произведеніе того же перваго производителя на дополненіе второго производителя до десяти», это яснѣе видно на примѣрѣ: чтобы составить, напримѣръ, 4×7, надо 4 умножить на 10, будетъ 40, потомъ 4 на 3, потому что 3 служитъ дополненіемъ 7-ми до 10, будетъ 12, и, наконецъ, изъ 40 вычесть 12, тогда остатокъ 28 и составитъ произведеніе 4 на 7. Какія все это лишнія хлопоты и затрудненія! Они всегда неизбѣжны, если на дѣло смотрѣть не прямо и просто, а съ предвзятой точки зрѣнія, и въ данномъ случаѣ съ той ошибочной точки зрѣнія, что будто бы чѣмъ объясненіе или способъ труднѣе, тѣмъ научнѣе. Не можетъ же быть, чтобы авторы учебниковъ, люди довольно искусные въ изобрѣтеніи разныхъ пріемовъ, не замѣчали среди нихъ самыхъ простыхъ и естественныхъ; но они какъ бы стѣснялись высказать простое слово.

Педагогика римлянъ и грековъ въ этомъ отношеніи гораздо разумнѣе средневѣковой, она смотрѣла на науку практичнѣе и старалась сдѣлать ее ясной и доступной. Не даромъ римлянамъ принадлежитъ умѣнье составлять таблицу на пальцахъ, о чемъ сказано выше.

Развитіе нормальнаго пріема умноженія.

Намъ, привыкшимъ къ опредѣленному порядку умноженія, представляется чѣмъ-то страннымъ, что могутъ существовать еще другіе способы; настолько мы сжились съ своимъ. А между тѣмъ ихъ очень много, и ни въ какомъ другомъ дѣйствіи не встрѣчается такого большого разнообразія, какъ въ умноженіи. Въ старину всякій авторъ выбивался изъ силъ, чтобы дать отъ себя какое-нибудь измѣненіе или улучшеніе. Мы приведемъ всего 27 способовъ, не ручаясь, конечно, за то, что здѣсь они всѣ безъ остатка; весьма возможно, что есть и еще, скрытые въ тайникахъ книгохранилищъ, разбросанные въ многочисленныхъ, главнымъ образомъ рукописныхъ, сборникахъ. Мы начнемъ съ современнаго нормальнаго способа и постепенно перейдемъ къ тѣмъ, которые болѣе всего отъ него уклоняются.

1. Авторомъ нашего нормальнаго способа умноженія многозначнаго числа на многозначное слѣдуетъ считать Адама Ризе, популярнаго нѣмецкаго педагога (1492—1559). Въ его рукахъ онъ получилъ послѣднюю отдѣлку и завершеніе, и теперь онъ считается самымъ удобнымъ. Главное отличіе способа Адама Ризе заключается въ томъ, что разряды всѣхъ чиселъ и множимаго, и множителя, и произведенія стоятъ одинъ подъ другимъ въ одномъ вертикальномъ столбцѣ; благодаря этому сразу видно, къ какому разряду принадлежитъ извѣстная цифра, и, слѣд., сбиться въ этомъ почти нельзя. Между тѣмъ, разстановка разрядовъ бываетъ самымъ труднымъ мѣстомъ при умноженіи, въ чемъ вы, читатель, убѣдитесь, когда просмотрите остальные способы. Среди нихъ есть и болѣе скорые, но нѣтъ ни одного такого, который представлялъ бы менѣе возможности сбиться. Примѣра на первый способъ мы продѣлывать не будемъ, такъ какъ всякій самъ сумѣетъ его придумать и рѣшить. Скажемъ еще разъ: нашъ настоящій нормальный порядокъ умноженія болѣе всего напоминаетъ вычисленіе по колоннамъ абака, настолько выдержано въ немъ подписываніе однихъ и тѣхъ же разрядовъ въ вертикальномъ столбцѣ.

2. Первый способъ непосредственно образовался изъ второго, отъ котораго отличается такою особенностью: мы теперь не пишемъ лишняго нуля у второго неполнаго произведенія, двухъ нулей у третьяго и т. д., потому что ставимъ десятки подъ десятками, сотни подъ сотнями, и не боимся сбиться; но прежде всѣ эти лишніе нули писались аккуратно: мы теперь ясно видимъ, что нули безполезны, но математики до Адама Ризе не рѣшались ихъ отбрасывать и считали

ихъ по большей части совершенно необходимыми. Этотъ второй способъ имѣлъ у итальянскихъ математиковъ особое названіе «per castellucio». Примѣръ:

$$\begin{array}{r} 456 \\ \times 97 \\ \hline 3192 \\ 41040 \\ \hline 44232 \end{array}$$

Для начинающихъ учиться умноженію не худо и теперь приписывать нули къ произведеніямъ множимаго на десятки, сотни и т. д. Тогда дѣтямъ понятнѣе будетъ, что для умноженія, въ нашемъ случаѣ на 90, необходимо умножить на 9 и считать полученное число за десятки. А потомъ, когда дѣти поймутъ это и нѣсколько привыкнутъ, можно нули выпускать и пользоваться чистымъ первымъ способомъ.

3. Третій пріемъ составленъ Петценштейнеромъ, нѣмецкимъ математикомъ XV вѣка. Въ немъ множимое и произведеніе пишется по нашему, а множитель выходитъ изъ вертикальныхъ колоннъ и ставится сбоку, справа наискось. Расположеніе такое:

$$\begin{array}{rl} 456 & \\ 3192 & 7 \\ 4104 & 9 \\ 44232 & \end{array}$$

Какой смыслъ и какая цѣль въ подобномъ подписываніи множителя сбоку? Объ этомъ догадаться не трудно. У насъ въ примѣрѣ взято двузначное число 97, а иногда случается вмѣсто него брать трехзначное, четырехзначное и т. д.; тогда легко бываетъ забыть, на какія цифры мы уже умножали, и на какія осталось умножать; чтобы не забыть, Петценштейнеръ и пишетъ каждую цифру при своемъ произведеніи. Еще ранѣе его Радульфъ Лаонскій (†1131) предлагалъ, впрочемъ на абакѣ, особенные кружки изъ дерева или изъ камня, чтобы приставлять ихъ къ тѣмъ разрядамъ множимаго и множителя, которые перемножаются. Надо сознаться, что Адамъ Ризе уступаетъ Петценштейнеру въ его заботахъ о множителѣ, и наши школьники по способу Адама Ризе нерѣдко пропускаютъ, особенно на первыхъ порахъ, цифры множителя. Для нихъ тоже не мѣшало бы на первое время, когда они еще учатся умножать, пользоваться чѣмъ-нибудь въ родѣ бумажки, чтобы они могли закрывать тѣ разряды, на которые еще не умножали.

4. Четвертый способъ принадлежитъ Кебелю, нѣмецкому ученому XVI вѣка. Множимое и множитель пишутся такъ же, какъ и у насъ, но въ произведеніи порядокъ подписыванія нарушается, и единицы отступаютъ вправо, вмѣсто того, чтобъ имъ стоять подъ единицами. Зачѣмъ это понадобилось Кебелю, и понять нельзя: нѣтъ въ этой формѣ ни удобства, ни вообще какой-нибудь замѣтной цѣли; единственно, на что тутъ можно думать, это что Кебель захотѣлъ изобрѣсти свой способъ и изобрѣлъ довольно неудачный.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 4 & 5 & 6 & \\
 & & 9 & 7 & \\
\hline
 & 3 & 1 & 9 & 2 \\
4 & 1 & 0 & 4 & \\
\hline
4 & 4 & 2 & 3 & 2
\end{array}$$

Впрочемъ, на способѣ Кебеля учащіеся могутъ убѣдиться въ томъ, что неполныя произведенія можно подписывать какъ угодно, и не подъ разрядами производителей, лишь бы только выполнялось условіе, что единицы складываются съ единицами, десятки съ десятками и т. д.

5. Пятый способъ отличается еще большей свободой въ подписываніи, въ немъ и отдѣльныя произведенія располагаются прямо другъ подъ другомъ, не обращая вниманія на то, что единицы оказались наискось отъ единицъ и десятки наискось отъ десятковъ: разумѣется, для отвѣта оно безразлично, складывать ли разряды вертикально или наклонно, лишь бы только не сложить единицъ съ десятками: есть въ этомъ способѣ много оригинальности и пожалуй изящества, но мало удобства. Названіе его «per quadrilatero» и если перевести это выраженіе съ итальянскаго языка на русскій, то оно будетъ значить «способъ четыреугольника».

			456	
			97	
3	1	9	2	2
4	1	0	4	3
	4	4	2	

Прежде всего чертится рѣшетка; потомъ въ ней располагаются отдѣльныя произведенія такъ, что ихъ крайнія цифры стоятъ другъ подъ другомъ вертикально; сложеніе разрядовъ идетъ наискось, и цифры произведенія размѣщаются вправо и внизу; читать ихъ надо слѣва. Все это очень интересно, но для практическаго примѣненія мало годится. Это скорѣй ариѳметическое украшеніе, забава.

6. Всѣ предыдущіе пять способовъ требуютъ такого же основного порядка умноженія, какой и мы примѣняемъ всегда у себя; разница только въ подписываніи данныхъ чиселъ и искомыхъ: въ то время, какъ мы стремимся все расположить въ вертикальныхъ колоннахъ, Петценштейнеръ выноситъ множителя на сторону, Кебель отступаетъ съ произведеніемъ вправо, а по способу «четырехугольника» разряды пишутся въ діагональномъ направленіи, т.-е. наискось; но вездѣ умноженіе начинается неизмѣнно съ низшихъ разрядовъ. Теперь мы обратимся къ случаямъ, когда оно начинается съ высшихъ разрядовъ, а не съ низшихъ. Это бываетъ и у насъ, но только при томъ условіи, если не приходится перечеркивать и исправлять написанныхъ цифръ. А цифръ не бываетъ, во-первыхъ, при устномъ счетѣ и, во-вторыхъ, при выкладкахъ на счетахъ. Поэтому въ обоихъ этихъ случаяхъ удобно начинать умноженіе съ высшихъ разрядовъ, тѣмъ болѣе, что и выговариваніе чиселъ и откладываніе ихъ на счетахъ идетъ все съ высшихъ разрядовъ. Но письменное умноженіе начинать съ лѣвой руки неудобно, потому что, если, напр., мы умножимъ десятки и запишемъ ихъ и потомъ перейдемъ къ единицамъ, то отъ умноженія единицъ могутъ получиться еще десятки, и намъ придется написанную цифру десятковъ стирать и замѣнять новой.

Далеко не безразлично, съ какихъ разрядовъ множимаго начинать письменное дѣйствіе, съ высшихъ или низшихъ. Послѣднее удобнѣе. Что же касается множителя, то въ сущности одна привычка заставляетъ насъ начинать съ единицъ, потому что можно съ такимъ же правомъ умножать сперва на высшіе разряды множителя и потомъ постепенно переходить къ низшимъ, лишь бы вѣрно подписывать произведенія, т.-е. десятки подъ десятками, а единицы подъ единицами. Покажемъ это на примѣрѣ:

```
  456
   97
4104
 3192
44232
```

Еще виднѣе въ многозначныхъ числахъ:

```
    33
  4567
132
 165
  198
   231
150711
```

7. Седьмой способъ принадлежитъ Вендлеру и отличается отъ шестого единственно тѣмъ же самымъ, чѣмъ второй отъ перваго, именно лишними нулями на мѣстѣ десятковъ, сотенъ и т. д. Если вписать эти нули, то 33×4567 изобразится въ такомъ видѣ:

```
    33
  4567
132000
 16500
  1980
   231
150711
```

8. Восьмой способъ устный, встрѣчается у Брамегупты, ученаго индуса VII в. по Р. Х. Онъ совершенно сходенъ съ нашимъ устнымъ пріемомъ, да такъ и должно быть, потому что индусы главнымъ об-

разомъ изобрѣтали и совершенствовали устный счетъ, они были первыми спеціалистами въ этомъ родѣ вычисленій; они вычисляли отдѣльныя произведенія въ умѣ, писали ихъ строкой и потомъ складывали. Лишнимъ, на нашъ взглядъ, могло бы показаться развѣ то, что множимое переписывается нѣсколько разъ, именно столько разъ, сколько разрядовъ во множителѣ.

$$\begin{array}{r|lr} 456 & 9 & 4104 \\ 456 & \;\;7 & 3192 \\ \hline & & 44232 \end{array}$$

9. Девятымъ пріемомъ умноженіе производится тоже сначала на десятки, а потомъ на единицы; если бы были сотни, то, конечно, сперва на сотни. Умноживши на десятки, произведеніе подписываютъ точно такъ же, какъ это сдѣлали бы и мы, но съ единицами идетъ иначе.

$$\begin{array}{r} 456 \\ 97 \\ \hline 41042 \\ 319 \\ \hline 44232 \end{array}$$

Когда мы умножимъ 456 на 7, то получимъ 3192. Изъ нихъ 319 десятковъ помѣщаемъ внизу, во второй строкѣ, подъ тѣми цифрами, какія соотвѣтствуютъ имъ по значенію, а 2 единицы вверху, рядомъ съ 4 десятками, прямо подъ единицами множителя, въ виду того, что это мѣсто ничѣмъ не занято. Подобная система писать цифры какъ можно выше, на свободныхъ мѣстахъ, проявляется у многихъ авторовъ, какъ это мы увидимъ впослѣдствіи; порядокъ этотъ довольно безвредный, потому что, гдѣ бы ни писать, лишь бы написать вѣрно подъ своимъ разрядомъ: но онъ можетъ оказаться и неудобнымъ тогда, когда счетчикъ собьется: тогда очень трудно разобраться въ рядѣ цифръ, найти, какая изъ нихъ принадлежитъ къ какому произведенію, и исправить ошибку. Этотъ девятый способъ приписывается Апіану (XVI в.).

10. Въ предыдущихъ 4 способахъ дѣйствіе начиналось съ высшихъ разрядовъ множителя, и въ этомъ только, главнымъ образомъ,

и заключалась ихъ особенность; цифры подписывались почти такъ же, какъ у насъ, и вообще большого измѣненія противъ нормальнаго порядка не было. Но теперь мы перейдемъ къ болѣе грубымъ и старымъ пріемамъ, въ которыхъ уклоненій отъ нашего уже гораздо больше. Отличіемъ ихъ является полная механичность, безъ всякаго вычисленія въ умѣ; составители этихъ пріемовъ держатся слишкомъ невысокаго мнѣнія о понятливости и сообразительности своихъ учениковъ, ничего не довѣряютъ устному счету и рекомендуютъ все записывать, даже до мелочей, и притомъ по опредѣленнымъ, точно установленнымъ формамъ. Напримѣръ, когда умножаются десятки, то къ ихъ произведенію нельзя прямо прибавить тѣхъ десятковъ, которые получились отъ единицъ, а надо написать отдѣльно и сложить ихъ въ самомъ концѣ, когда всѣ мелкія умноженія будутъ выполнены. Эти тяжеловѣсные, громоздкіе способы въ настоящее время всѣми оставлены, и никому въ голову не придетъ ими воспользоваться, между тѣмъ, въ XV—XVII столѣтіи, въ эпоху наиболѣе усиленной работы надъ ариѳметикой, когда индусская система проникла и въ народъ, и въ школу, эти способы были ходячими и общепринятыми. Сейчасъ они не имѣютъ никакой цѣны, потому что требуютъ много лишняго письма и лишняго времени для вычисленій, мы же ихъ приводимъ съ тою цѣлью, чтобъ показать, изъ какихъ первоначальныхъ и несовершенныхъ формъ образовались наши болѣе совершенныя.

Вотъ способъ Штейнмеца (XVI в.). Примѣръ:

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 4 & 5 & 6 \\
 & & & 9 & 7 \\
\hline
3 & 2 & 3 & 4 & 2 \\
 & 4 & 8 & 5 & \\
 & 6 & 5 & 4 & \\
 & & 5 & & \\
\hline
4 & 4 & 2 & 3 & 2
\end{array}$$

Шестью семь 42, такъ и пишемъ; пятью семь 35, пишемъ 5 десятковъ подъ 4 десятками, а три сотни вверху подъ сотнями, потому что тамъ мѣсто есть свободное; четырежды семь 28, пишемъ 8 сотенъ подъ 3-мя, а двѣ тысячи на свободномъ мѣстѣ тысячъ въ верхней строкѣ. Вообще стараемся писать цифры какъ можно выше, гдѣ только есть свободное мѣсто для извѣстнаго разряда. Отдѣльныя произведенія располагаются, какъ видимъ, строками, которыя, чѣмъ ниже, все короче, и получается фигура, похожая на треугольникъ, такъ что и самый способъ носитъ названіе треугольника. Послѣдніе его слѣды встрѣчаются въ учебникахъ еще въ XVII столѣтіи.

11. Умноженіе треугольникомъ имѣетъ не одну форму, а нѣсколько, въ зависимости отъ того, начинать ли дѣйствіе съ высшихъ разрядовъ или низшихъ. или даже какихъ-нибудь промежуточныхъ, писать ли цифры какъ можно выше или какъ можно ниже. Если начинать умноженіе съ высшихъ разрядовъ, то образуется такая фигура:

```
456.97
36542
 455
 284
  3
44232
```

12. По двѣнадцатому способу умноженіе треугольникомъ начинается съ какого-нибудь средняго разряда. Конечно, это безразлично для произведенія, если только мы не собьемся въ порядкѣ цифръ и не пропустимъ чего-нибудь и не возьмемъ лишняго. Умножимъ сперва 5 дес. на 97, потомъ 4 сотни и, наконецъ, 6 единицъ.

```
456.97
34552
 634
 284
  5
44232
```

Треугольникъ можно бы повернуть основаніемъ внизъ и вершиной вверхъ. Тогда фигура получится красивѣе. Особенно она хороша при длинныхъ многозначныхъ числахъ, когда очертаніе треугольника выдѣляется яснѣе.

```
      79745
      64689
 4236423245
  28545636
  54282440
    427263
    421630
      5081
      2420
        63
        30
 ----------
 5158624305
```

13. Стоило только математикамъ попасть на одну геометрическую фигуру, на треугольникъ, и они принялись изобрѣтать всевозможныя формы: уголъ, ромбъ и т. д. Наперерывъ, одинъ передъ другимъ, школьные педагоги въ Германіи и Италіи XVI—XVII вѣка стали предлагать хитроумные, фигурные способы, въ которыхъ не имѣлось въ виду удобства, а требовалось только представить что-нибудь новое и замысловатое. Нѣкоторые педагоги получили даже своеобразную извѣстность въ этомъ направленіи. Такъ итальянецъ Тарталіа училъ въ своей школѣ 8 способамъ; столькимъ же училъ и Лука-де-Бурго; но вычислять по нимъ они своихъ учениковъ не заставляли, кромѣ одного способа или двухъ, и приводили остальные только по установившемуся обычаю или изъ хвастовства.

Расположеніе угломъ достигалось благодаря тому, что произведеніе простыхъ единицъ отодвигалось вправо, а остальные разряды писались симметрично вверху и внизу. Вотъ форма угла при умноженіи 456 на 97.

```
 456.97
  36
   45
    54
     42
    35
   28
 -----
 44232
```

Первое произведеніе 36 составилось изъ множителей 4 и 9, второе—изъ 5 и 9, третье—изъ 6 и 9. Такимъ образомъ, мы помножили на десятки и начали дѣйствіе въ этомъ случаѣ съ сотенъ множимаго; далѣе умножаемъ на единицы, но ведемъ уже въ обратномъ порядкѣ, именно, начинаемъ съ единицъ множимаго и постепенно добираемся до его сотенъ.

14. Четырнадцатый способъ—ромба. Онъ еще замысловатѣе, чѣмъ предыдущіе. Нужна особенная внимательность, да и знаніе секрета, какъ составлять ромбъ. Если помножить 456 на 397, то ромбъ можетъ получиться слѣдующимъ путемъ. Вверху пишется произведеніе 4 сотенъ на 7 единицъ. подъ нимъ произведеніе 5 десятковъ на 3 сотни и на 7 единицъ: въ длинной строкѣ помѣщается 4 с. $\times$ 3 с., 5 дес. $\times$ 9 дес. и 6 ед. $\times$ 7 ед.; далѣе располагаются и остальныя произведенія. Все это очень сбивчиво и неудобно, даетъ массу ошибокъ въ вычисленіи, которыя найти потомъ такъ нелегко, что лучше все бросить и сдѣлать снова. Съ непривычки, дѣло долго не клеится, отвѣта не выходитъ, но, зато, въ концѣ ученикъ имѣетъ право похвастать: у него получился ромбъ.

456.397
28
1535
124542
3654
18
181032

15. До сихъ поръ мы подписывали отдѣльныя произведенія внизу подъ множимымъ и множителемъ, и на это, конечно, у насъ была причина, потому что всѣ люди начинаютъ писать съ верхней стороны листа и постепенно спускаются книзу, гдѣ мѣсто свободное, неисписанное. Но отвѣтъ получится одинаково вѣрный и въ томъ случаѣ, если, не жалѣя бумаги, мы начнемъ дѣйствіе пониже и оставимъ мѣсто для отдѣльныхъ произведеній выше производителей. Получится у насъ такъ:

02
15
8654
1485
032342
456
297
135432

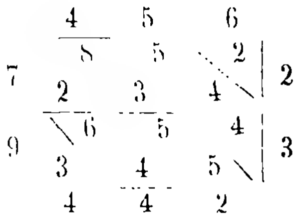
Способъ этотъ указалъ Глареанъ въ XVI в. Вычисленіе начинается справа, съ низшихъ разрядовъ; отвѣтъ въ самомъ низу.

16. Шестнадцатый способъ очень сходенъ съ предыдущимъ и является его предшественникомъ по времени, такъ какъ образовался въ XV вѣкѣ. Его даетъ ученый арабъ Алькальнади изъ Андалузіи. Особенность въ немъ та, что множимое переписывается нѣсколько разъ и притомъ столько разъ, сколько цифръ во множителѣ. И еще есть особенность: множитель не стоитъ подъ множимымъ, а располагается выше его; кромѣ того, отдѣльныя произведенія разсѣяны по разнымъ строкамъ.

44232
42
35
28
54
45
36
97
456
456

Множимое, повидимому, передвигается затѣмъ, чтобы не сбиться, какой разрядъ множить на какой. Впрочемъ, выгоды отъ этого передвиженія особенной не представляется.

17. Въ высшей степени искусственная запись встрѣчается у Баскары, индусскаго автора, жившаго въ XII вѣкѣ. Это та же рѣшетка, что и въ 5 способѣ, но только съ полными цифрами, безъ всякаго пропуска и сокращенія. У итальянцевъ она называлась «gelosia», по образцу фигурныхъ рѣшетокъ, бывшихъ въ окнахъ средневѣковыхъ теремовъ.



Множимое 456 мы пишемъ вверху, множителя 97 съ лѣвой стороны. Каждый разрядъ числа 456 множится на каждый разрядъ 97-ми. Всего образуется 6 отдѣльныхъ произведеній. Ихъ мы пишемъ полностью по клѣткамъ, такъ, чтобы всякое произведеніе стояло противъ тѣхъ разрядовъ, отъ которыхъ оно получилось; напримѣръ, шестью семь 42, ставимъ это число подъ 6-ю и притомъ въ верхней строкѣ, потому что множитель 7 стоитъ въ этой строкѣ съ лѣвой ея стороны, 2 помѣщаемъ въ верхнемъ правомъ углу клѣтки, а 4 десятка въ нижнемъ лѣвомъ. Такъ же ведемъ дѣйствіе и съ остальными разрядами. Чтобы получить отвѣтъ, стоитъ только сложить числа въ діагональномъ порядкѣ наискось: 2 единицы сносимъ, $5 + 4 + 4 = 13$ десятковъ, изъ нихъ 3 пишемъ: $8 + 3 + 5 + 5 + 1 = 22$ сотни, 2 пишемъ; тысячъ будетъ $2 + 6 + 4 + 2 = 14$, 4 пишемъ и, наконецъ, десятковъ тысячъ $3 + 1$, всего 4. Искомое произведеніе выразится пятью цифрами: 44232. Способъ этотъ, какъ видно, очень сложный, фигурный и сбивчивый. Надо твердо помнить и хорошо привыкнуть къ тому, какъ чертится рѣшетка, какъ пишутся производители, гдѣ помѣщаются отдѣльныя произведенія, и какъ читается отвѣтъ; стоитъ только немножко не остеречься, забыть, и тогда всѣ разряды перепутываются, и никакъ нельзя будетъ отличить, гдѣ единицы, гдѣ десятки, и что складывать съ чѣмъ. Вообще это вовсе не дѣловой способъ и не школьный, а скорѣе плодъ математической изобрѣтательности и развлеченіе въ математикѣ, которая въ средніе вѣка была особенно суха и недоступна, а подобныя выдумки ее оживляли.

18. Арабъ Альнасави (XI в.) училъ умножать еще болѣе чуждымъ для насъ пріемомъ. Онъ тоже не допускалъ устнаго счета и тоже подписывалъ всѣ цифры сполна, но сверхъ того и въ сложеніи у него было отличіе, потому что отдѣльные разряды скла-

дывались не въ концѣ всего дѣйствія, а постепенно, по мѣрѣ того, какъ они получались.

42
313
189
40042
36597
4566
45

Множитель 97 пишется надъ множимымъ 456 такъ, что его высшій разрядъ, 9 десятковъ, стоитъ надъ простыми единицами числа 456. Вычисленіе начинается слѣва. $4 \times 9 = 36$, пишемъ 6 надъ четырьмя, а 3 рядомъ налѣво: $5 \times 9 = 45$, изъ нихъ 5 пишемъ рядомъ съ 6-ю, а 4 не подписываемъ надъ 6-ю, какъ это дѣлали въ способѣ треугольника, но прибавляемъ къ 6-ти, будетъ 10, прибавляемъ къ 30, будетъ 40, эти цифры помѣщаемъ надъ 36-ю. Ведемъ умноженіе далѣе: $6 \times 9 = 54$, изъ этого 4 пишемъ надъ 9-ю, потому что нижнее мѣсто занято, а 5 прибавляемъ къ 5-ти, получится 10, нуль пишемъ надъ пятью, единицу—надъ нулемъ, именно тѣмъ нулемъ, который принадлежитъ числу 40. Такимъ-то образомъ сложеніе идетъ рука объ руку съ умноженіемъ, и когда всѣ умноженія окончатся, то окончится и сложеніе, и отвѣтъ представится самыми высшими цифрами въ каждомъ вертикальномъ столбцѣ. Какъ видно, Альнасави допускаетъ особенность и въ множимомъ, именно онъ его еще разъ подвигаетъ и не только горизонтально, но такъ, что крайній разрядъ переставляется въ слѣдующую высшую строчку. Цѣль перемѣщенія та, чтобы единицы множимаго всегда приходились подъ тѣмъ раздрядомъ множителя, на какой умножаемъ.

Альнасави заимствовалъ свой пріемъ у индусовъ; индусы же предпочитали устный счетъ письменному, не любили лишнихъ цифръ и, во всякомъ случаѣ, не стали бы вычислять такъ растянуто, какъ это дѣлаетъ Альнасави. У какого же индуса онъ его заимствовалъ? Или онъ самъ его такъ измѣнилъ? Объяснить это все можно такъ. Индусы вычисляли на пескѣ и сейчасъ же стирали тѣ цифры, которыя имъ не нужны, поэтому имъ было такъ легко передвигать множимое или множителя: они стирали прежнее и писали новое. Поэтому и мелкія сложенія и умноженія они писали только на одну минуту: и если имъ цифра не нужна, они ее сейчасъ замѣняли новой: такъ что, дѣйствительно, индусы не сбивались въ длинныхъ рядахъ цифръ и не запутывались, тѣмъ болѣе, что ихъ работѣ много помогалъ устный счетъ. Но арабы и Западная Европа переняли способы индусовъ, а примѣнять ихъ стали чаще всего на доскахъ и на бумагѣ, гдѣ цифры перетирать совершенно неудобно; отъ этого и получилась масса лишняго письма, сбивчивость и трудность въ вычисленіяхъ. Не скоро поняли европейскіе математики, что недостаточно перенести чужой пріемъ къ себѣ, но надо еще примѣнить его къ своимъ условіямъ, и тогда онъ будетъ пригоднымъ и удобнымъ.

19. Во всѣхъ разобранныхъ нами 18-ти способахъ, какъ они ни сложны и ни разнообразны, существенный порядокъ дѣйствія все время остается тотъ же, вездѣ дается 2 числа, множимое и множитель, и первое число, т.-е. множимое, помножается такъ или иначе на отдѣльные разряды множителя, сперва на его единицы, потомъ на десятки, сотни и т. д., или же, наоборотъ, раньше на сотни, а потомъ уже на десятки и единицы. Но нѣтъ ничего легче примѣнить другой порядокъ: не цѣлое множимое умножать на отдѣльные разряды множителя, а отдѣльные разряды множимаго на цѣлаго множителя. Такъ училъ индусскій авторъ Брамегупта (въ VII ст. по Р. Х.).

```
44232
  582
 485
388
  456
 97
  97
   97
```

Отвѣтъ у него помѣщается въ самомъ верху, данныя числа — внизу. Множитель переписывается столько разъ, сколько цифръ во множимомъ. Начинаемъ умножать 4 сотни на 97, получится 388 сотенъ, ихъ пишемъ надъ сотнями. Такъ же поступаемъ съ десятками и единицами.

20. Самыми старыми первоначальными способами умноженія надо считать тѣ, когда умноженіе замѣняется сложеніемъ. Умноженіе, конечно, и есть въ существѣ дѣла сложеніе, но только сокращенное, благодаря таблицѣ и вслѣдствіе равенства слагаемыхъ. Чтобы, напримѣръ, умножить 9 на 27, можно бы 9 выписать 27 разъ и потомъ послѣдовательно складывать: $9+9=18$, $18+9=27$, $27+9=36$ и т. д. до 243-хъ. Но такое сосчитываніе было бы слишкомъ продолжительнымъ, и вотъ здѣсь является на помощь таблица умноженія, которая значительно сокращаетъ работу; изъ таблицы намъ извѣстно, что $9\times 2=18$, а слѣдовательно $90\times 2=180$, да $9\times 7=63$, всего составится $180+63=243$. Такимъ образомъ мы замѣнили набираніе 27 слагаемыхъ болѣе простыми дѣйствіями, именно 2 умноженіями и однимъ сложеніемъ. Не сразу выработала ариѳметика такой простой и легкій путь, чтобы замѣнять сложеніе равныхъ слагаемыхъ умноженіемъ. Поэтому на первыхъ ступеняхъ ея развитія, при наглядномъ счетѣ и при выкладкахъ на разныхъ счетныхъ приборахъ, преобладаетъ чистое сложеніе, а умноженіе появляется только урывками и проблесками. Едва къ концу среднихъ вѣковъ оно вполнѣ вступило въ свои права.

Приведемъ образецъ вычисленій на римскихъ цифрахъ. Изъ него хорошо видно, насколько сложеніе преобладало надъ умноженіемъ и замѣняло его. Требуется, положимъ, CXXXXIIII умножить на XXX. Тогда дѣйствіе располагается слѣдующимъ образомъ:

$$\begin{gathered}\mathrm{C}\,.\,\mathrm{X}=\mathrm{M}\\ \mathrm{C}\,.\,\mathrm{X}=\mathrm{M}\\ \mathrm{C}\,.\,\mathrm{X}=\mathrm{M}\\ \mathrm{XXXX}\,.\,\mathrm{XXX}=\mathrm{MCC}\\ \mathrm{XXX}+\mathrm{XXX}+\mathrm{XXX}+\mathrm{XXX}=\mathrm{CXX}.\end{gathered}$$

Такъ какъ множитель XXX состоитъ изъ $\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{X}$, то достаточно повторить множимое сперва X разъ, потомъ еще X разъ, и, наконецъ, еще X разъ и полученные отвѣты сложить. Но когда мы начнемъ повторять X разъ, то множимое, въ свою очередь, разложится на отдѣльныя слагаемыя: $\mathrm{C}+\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{X}+\mathrm{IIII}$: и придется намъ каждое слагаемое перваго числа помножить на каждое слагаемое второго.

21. Двадцать первымъ способомъ будетъ такъ называемый „per aschapezza". Въ переводѣ съ итальянскаго языка,—его чаще другихъ примѣняли итальянцы,—это значитъ способъ „разложенія". Примѣръ: 44×26. Для этого 26 разлагаемъ на какія-нибудь легкія слагаемыя, обыкновенно однозначныя, въ родѣ $3 + 4 + 5 + 6 + 8$, и составляемъ пять произведеній: $44 . 3$, $44 . 4$, $44 . 5$, $44 . 6$, $44 . 8$. Всѣ ихъ можно легко найти устно, и въ этомъ заключается преимущество подобнаго умноженія. Но иногда, забывая о главномъ условіи удобства, примѣняли этотъ способъ и тогда, когда онъ не даетъ никакого выигрыша ни во времени, ни въ письмѣ. Хорошимъ примѣромъ такого теоретическаго пользованія разложеніемъ можетъ служить помѣщенный въ ариѳметикѣ Брамегупты (VII в.): 235×288, съ разложеніемъ числа 288 на $9 + 8 + 151 + 120$. Очевидно Брамегупта, выбирая такія неудобныя слагаемыя, не только не упростилъ дѣйствія, а скорѣе усложнилъ и затруднилъ; но онъ, навѣрное, и не задавался цѣлью упростить и облегчить вычисленіе, а желалъ только представить новую форму умноженія.

22. Какъ мы уже сказали, замѣна умноженія сложеніемъ является самымъ легкимъ и простымъ пріемомъ и въ то же время самымъ старымъ и испытаннымъ. Египтяне за много столѣтій до Р. Х. умѣли съ большимъ искусствомъ, чрезвычайно свободно и остроумно пользоваться этой замѣной. Если, напримѣръ, имъ требовалось умножить на 17, то они сперва складывали множимое само съ собой и получали такимъ образомъ двойное число; его тоже складывали само съ собой, получали четверное число; четверное складывали съ четвернымъ, получали восьмерное: восьмерное съ восьмернымъ, получится 16-ть слагаемыхъ, а такъ какъ ихъ задано набрать 17-ть, то остается добавить только одно слагаемое и отвѣтъ будетъ найденъ. Подобнымъ же образомъ они могли, напримѣръ, вычислять $466 . 13$. Они составляли $466 . 2 = 932$, $932 . 2 = 1864$, $1864 . 2 = 3728$, затѣмъ складывали восьмерное число съ четвернымъ и съ простымъ и получали $466 . 13 = 3728 + 1864 + 466 = 6058$. Такимъ путемъ египтяне умѣли добираться до сложныхъ результатовъ, хотя и медленно, но довольно вѣрно и успѣшно. Изъ всѣхъ умноженій у нихъ было только одно удвоеніе: они даже не знали таблицы умноженія. Не они ли пришли къ мысли выдѣлить удвоеніе въ особое дѣйствіе,

къ мысли, которая примѣнялась очень долго и едва въ XVI столѣтіи была оставлена, потому что съ этого времени удвоеніе вошло въ составъ вообще умноженія.

Покончимъ теперь на египтянахъ и не будемъ уходить далѣе въ глубь вѣковъ, тѣмъ болѣе, что у насъ нѣтъ фактическаго матеріала для этого. Подведемъ итоги всему, что сказали объ умноженіи. Оно начинается съ сложенія равныхъ слагаемыхъ и въ этомъ случаѣ не пользуется никакими особенными правилами, сокращеніями и удобствами. Затѣмъ, благодаря практикѣ, начинаетъ выдѣляться удвоеніе и оно образуетъ фундаментъ новаго дѣйствія—умноженія: по образцу удвоенія легко могли возникнуть другіе подобные разсчеты и удвоеніе натолкнуло на то, чтобы находить тройное число, четверное, десятерное и т. п. Всѣ эти употребительные случаи, повторяясь часто, привели къ таблицѣ умноженія и выдѣлили окончательно дѣйствіе умноженія изъ массы случаевъ сложенія. Тогда же начинается письменное производство этого дѣйствія, сначала въ грубой и несовершенной формѣ, при помощи абака и другихъ похожихъ на него пособій, съ многочисленными стираніями и измѣненіями цифръ; *сложеніе отдѣльныхъ произведеній сначала шло попутно, вмѣстѣ съ* умноженіемъ разрядовъ, но потомъ его начали относить на самый конецъ и производить тогда, когда уже всѣ произведенія найдены. Въ старинныхъ способахъ умноженія устный счетъ почти не допускался, и всѣ цифры, какія надо, писались безъ пропуска, и въ умѣ ничего не удерживалось: такъ, по крайней мѣрѣ, было въ Западной Европѣ въ средніе вѣка. Ближе къ нашему времени стали примѣнять и устный счетъ, начали помогать письму тѣмъ, что нѣкоторыя цифры удерживали въ умѣ, и такимъ-то образомъ развился и принялъ окончательную отдѣлку нашъ современный нормальный способъ умноженія. Куда же онъ пойдетъ далѣе и что его ждетъ въ будущемъ? Останется ли онъ такимъ же по прошествіи столѣтій? Я не пророкъ, но кое-что сказать могу впередъ, и на это есть основанія. Нашъ способъ умноженія будетъ стремиться къ тому, чтобъ сдѣлаться проще и короче. Сократится онъ благодаря устному счету, а упростится благодаря примѣненію легкихъ и сокращенныхъ пріемовъ. Съ развитіемъ устнаго счета, людямъ придется писать меньше и именно только то, что, дѣйствительно, трудно высчитать устно. Съ развитіемъ же искусственныхъ вспомогательныхъ упрощеній, человѣкъ не будетъ вычислять совершенно механически, какъ машина, а будетъ вникать въ особенности каждаго отдѣльнаго примѣра и всячески примѣнять ихъ къ выгодѣ. Попытки въ этомъ отношеніи были и раньше; и мы ихъ теперь разберемъ.

23. Индусы и Адамъ Ризе, и итальянцы XVI в. часто разлагали множителя на производителей. У итальянцевъ это называлось «per repiego». Чтобы, напр., умножить на 15, можно данное число умножить на 5, и полученное вновь умножить на 3. Чтобы умножить на 121, можно умножить на 11 и опять на 11. Еще лучше у Адама Ризе, если ему надо какое-нибудь число взять слагаемымъ 46 разъ, то онъ умножаетъ данное число на 9, полученный результатъ—на 5 и ко всему этому прикладываетъ еще одно, 46 слагаемое. Хорошо бы и намъ пользоваться почаще такими сокращеніями и пріучать къ нимъ своихъ дѣтей въ училищахъ. Есть, правда, во многихъ школахъ, особенно въ начальныхъ, спеціальныя занятія по устному счету, но, во-первыхъ, очень жаль, что они въ средней школѣ глохнутъ и не продолжаются, и во-вторыхъ, они ведутся, обыкновенно, по шаблону и не столько развиваютъ личную сообразительность дѣтей, сколько пріучаютъ ихъ къ готовымъ формуламъ.

24. Другимъ хорошимъ способомъ, который тоже можетъ развивать сообразительность и помогать вычисленію, является слѣдующій. Множитель замѣняется новымъ числомъ, которое больше его въ нѣсколько разъ или на нѣсколько единицъ, и притомъ гораздо удобнѣе для дѣйствія, чѣмъ самъ данный множитель. Напримѣръ, если намъ задано умножить какое-нибудь число на 25, то мы вмѣсто этого умножимъ на 100—такъ гораздо легче—и полученное отъ этого умноженія число раздѣлимъ на 4. Точно также, чтобы умножить на 98, мы можемъ умножить на 100 и изъ этого произведенія вычесть двойное множимое, потому что мы его взяли лишнихъ 2 раза. Оба эти пріема хороши для устныхъ вычисленій, они придуманы давно, еще индусами: но все еще не имѣютъ такого большого примѣненія на практикѣ, какого заслуживаютъ по своей легкости и удобству.

25. Есть еще методъ умноженія многозначныхъ чиселъ, очень интересный и оригинальный. Онъ построенъ на совершенно иной руководящей мысли, чѣмъ нашъ настоящій методъ. Мы теперь инте-

ресуемся множимымъ и множителемъ, старательно подписывая ихъ другъ подъ другомъ или рядомъ, разлагаемъ ихъ на разряды и разсуждаемъ, съ которой стороны лучше начать: такъ что порядокъ вычисленія у насъ опредѣляется множимымъ и множителемъ, и наши заботы мало касаются произведенія, которое выходитъ какъ-то само собой, изъ сложенія частныхъ результатовъ. Наоборотъ, способъ «крестикомъ», о которомъ мы будемъ сейчасъ говорить, обращаетъ исключительное свое вниманіе на результатъ умноженія и изъ его разбора, а не изъ разбора данныхъ чиселъ, выводитъ порядокъ дѣйствія. Въ способѣ «крестика» надо сперва вычислить единицы произведенія, потомъ его десятки и притомъ сразу всѣ, какіе только могутъ оказаться, чтобы затѣмъ къ десяткамъ болѣе не возвращаться; потомъ надо вычислить сотни произведенія, опять-таки всѣ, какія только могутъ въ немъ быть; и такъ мы идемъ послѣдовательно отъ одного разряда къ другому. Еще греки любили пользоваться этимъ умноженіемъ и назвали его «хіазмомъ», потому что греческая буква хи «Х» какъ разъ своей фигурой напоминаетъ крестикъ.

Возьмемъ примѣръ сперва двузначный: 56×97 и поставимъ такой вопросъ: откуда могутъ получиться единицы произведенія? Очевидно, только отъ перемноженія простыхъ единицъ, потому что отъ умноженія десятковъ будутъ десятки, отъ сотенъ будутъ сотни и т. д., $6 \times 7 = 42$, слѣд. простыхъ единицъ въ отвѣтѣ будетъ двѣ, не больше и не меньше. Итакъ, одну цифру мы нашли, она будетъ обязательно 2. Рѣшаемъ теперь второй вопросъ: откуда получаются десятки произведенія? Во-первыхъ, отъ умноженія десятковъ на единицы, во-вторыхъ, отъ умноженія единицъ на десятки и, кромѣ того, нѣсколько десятковъ образовалось отъ перемноженія простыхъ единицъ. Больше ни откуда десятковъ получиться не можетъ, такъ какъ во всякомъ случаѣ сотни и тысячи дадутъ по крайней мѣрѣ сотни же и тысячи. Вычисляемъ десятки $5 \times 7 = 35$, $9 \times 6 = 54$, да 4 десятка осталось отъ единицъ, всего составится ихъ 93: изъ этого 9 сотенъ пока замѣтимъ, а 3 десятка можемъ записать спокойно: это ужъ цифра окончательная. Высчитываемъ сотни. Въ нашемъ примѣрѣ онѣ могутъ получиться только отъ умноженія десятковъ на десятки и ихъ будетъ 45, да 9 сотенъ отъ десятковъ, всего 54 сотни. Пишемъ ихъ въ окончательномъ отвѣтѣ и получаемъ: $56 \times 97 = 5432$. «Крестикъ» мы здѣсь примѣняли, когда составляли десятки произведенія, потому что въ этомъ случаѣ мы умножали крестъ на крестъ 5 на 9 и 6 на 7. Все дѣйствіе можно изобразить такой фигурой:

$$\begin{array}{cc} 5 & 6 \\ & \times \\ 9 & 7 \\ \hline 54 & 32 \end{array}$$

Чтобы читателю былъ яснѣе виденъ ходъ вычисленія, разберемъ еще трехзначный примѣръ. Возьмемъ 467×893. Низшимъ разрядомъ въ произведеніи будутъ простыя единицы, а высшимъ—десятки тысячъ, потому что сотни, умноженныя на сотни, даютъ десятки тысячъ: всего, слѣдовательно, въ произведеніи будетъ 5 разрядовъ. Опредѣляемъ ихъ постепенно. Прежде всего запишемъ данныя числа такъ, чтобы цифры стояли порѣже и между ними были свободные промежутки, а зачѣмъ,—это будетъ понятно далѣе.

$$\begin{array}{ccc} 4 & 6 & 7 \\ 8 & 9 & 3 \\ \hline \multicolumn{3}{c}{417031} \end{array}$$

Простыя единицы образуются отъ перемноженія простыхъ же единицъ: $7 \times 3 = 21$, единицу пишемъ и 2 въ умѣ. Десятки образуются отъ умноженія десятковъ на единицы и единицы на десятки и дадутъ: $6 \times 3 = 18$, $9 \times 7 = 63$, да 2, всего 83, три пишемъ и 8 замѣчаемъ. Но мы пишемъ 3 десятка не подъ десятками, а въ промежуткѣ между единицами и десятками: цѣль здѣсь та, чтобы сохранить полную симметрію въ расположеніи цифръ и строгій порядокъ, который не допустилъ бы насъ сбиться; дѣйствительно, какъ у насъ образовалась цифра единицъ и гдѣ она подписана? Она образовалась отъ единицъ и подъ ними подписана: $\begin{array}{c} 7 \\ 3 \\ \hline 1 \end{array}$. Какъ образовалась цифра десятковъ и гдѣ ее лучше всего подписать? На это отвѣтимъ мы такимъ чертежомъ:

$$\begin{array}{cc} 6 & 3 \\ 9 & 7 \\ \multicolumn{2}{c}{3} \end{array}$$

Цифра 3 стоитъ симметрично

подъ тѣми цифрами, отъ которыхъ она получилась. Вотъ далье чертежи для сотенъ, тысячъ и десятковъ тысячъ:

4	4 6	4 6 7
8	8 9	8 9 3
41 дес. тысячъ.	7 тысячъ.	0 сотенъ.

Сотни высчитываются такъ. Онѣ получаются отъ умноженія сотенъ на единицы, единицъ на сотни и десятковъ на десятки. будетъ $4 . 3 = 12$. $7 . 8 = 56$, $6 . 9 = 54$, да отъ умноженія десятковъ осталось 8 сотенъ, всего ихъ составится 130, нуль пишемъ подъ чертой, а 13 тысячъ пока держимъ въ умѣ. Отыскиваемъ теперь тысячи нашего произведенія: онѣ получаются тогда, когда сотни множатся на десятки и десятки на сотни, слѣд. $4 \times 9 = 36$, $6 \times 8 = 48$, да еще замѣченныхъ 13, и составится ихъ всего 97. Цифру 7 пишемъ подъ чертой. Легко, наконецъ, опредѣлить и десятки тысячъ: ихъ будетъ 41.

Такимъ же образомъ можно умножать и всякія многозначныя числа, до пятизначныхъ, шестизначныхъ и выше. Симметрія руководитъ нами во всѣхъ этихъ примѣрахъ и не позволяетъ сбиться. Поэтому, если во множимомъ и во множителѣ цифръ не поровну, напр., четырехзначное число берется съ двузначнымъ, то лучше всего приписать пару лишнихъ нулей и получить опять симметричную фигуру:

$$\begin{array}{r} 2\ 3\ 4\ 6 \\ \underline{0\ 0\ 5\ 8} \\ 136068 \end{array}$$

Индусы были въ восхищеніи отъ этого способа, часто имъ пользовались и умѣли умножать по этому способу очень быстро, за что и прозвали его «молніеноснымъ». Онъ вовсе не труденъ, если только научиться быстро складывать двузначныя числа: что онъ не нуждается въ большомъ письмѣ и даетъ выигрышъ во времени, въ этомъ, конечно, нечего и сомнѣваться. Какъ было бы хорошо, если бы онъ, забытый послѣ индусовъ и грековъ, получилъ доступъ въ наши школы, распространился въ народѣ и оправдалъ свое названіе «молніеноснаго».

26. Закончимъ нашу бесѣду объ умноженіи объясненіемъ послѣдняго, въ высшей степени оригинальнаго пріема, который незнающаго наблюдателя можетъ даже поразить. Передаютъ, будто одинъ нѣмецкій школьный учитель показалъ дѣтямъ это умноженіе, а потомъ при посѣтителяхъ спрашивалъ считать устно и приводилъ въ удивленіе быстротой счета, разумѣется въ томъ случаѣ, если посѣтитель не зналъ секрета. Учитель: «83 $\times$ 87!» — Ученикъ: «80 $\times$ 90 = 7200 да 3-жды семь 21, всего 7221». — Учитель: «24 $\times$ 26!» — Ученикъ: «20 $\times$ 30 = 600, да четырежды шесть 24, всего 624». — Учитель: «92 $\times$ 98!» — Ученикъ «90 $\times$ 100 = 9000, да дважды восемь 16, всего 9016». Секретъ, какъ видно, заключается въ томъ, что не всякій примѣръ годится для этого правила, а только такой, гдѣ бы десятки въ обоихъ множителяхъ были одинаковыми, а единицы составляли въ суммѣ десять; такъ что если взять одинъ множитель, наприм., 41, то парнымъ къ нему множителемъ обязательно долженъ быть 49. Правило для подобныхъ примѣровъ слѣдующее: надо десятки помножить на слѣдующіе десятки (40 $\times$ 50 = 2000), а единицы просто перемножить (1 $\times$ 9 = 9) и все сложить: 2000 + 9 = 2009. Правило это далъ итальянецъ Тарталья (XVI в.), большой изобрѣтатель разныхъ способовъ, и письменныхъ, и устныхъ.

Объяснимъ послѣдній примѣръ: 41 $\times$ 49. Какъ бы мы по-просту стали его вычислять? Сперва 40 помножили бы на 40, потомъ 40 на 9, потомъ 1 на 40 и, наконецъ, 1 на 9. Намъ пришлось бы 40 повторить 40 разъ и 9 разъ и еще 1 разъ, потому-что 1 $\times$ 40 все равно, что 40 $\times$ 1: такимъ образомъ 40 надо помножить на 50, да 1 на 9, всего 2009.

Подобные пріемы, дѣйствительно, даютъ при устномъ счетѣ громадную выгоду и удобство. Смѣло рекомендуемъ ихъ вниманію любителей ариѳметики.

Дѣленіе.

«Dura cosa e la partita» — звучитъ старинная итальянская поговорка, которая значитъ въ русскомъ переводѣ: «трудная вещь — дѣленіе». Не даромъ Лука де-Бурго, итальянскій математикъ XVI вѣка, утѣшаетъ начинающихъ учиться юношей и говоритъ, что «кто умѣетъ дѣлить, тому все остальное пустяки, потому что все заключается въ дѣленіи». И нашъ Магницкій не отстаетъ въ этомъ случаѣ и тоже, кончивши дѣленіе, вздыхаетъ свободно и назидаетъ своихъ «мудролюбивыхъ отроковъ» стихами:

Первую часть докончивше
И вся въ цѣлыхъ изучивше,
Ихъ въ памяти твердо держимъ
И за та вся Бога блажимъ,
Что даде намъ безъ напасти
Зрѣти конецъ первой части.

Трудно дѣленіе нашимъ школьникамъ и въ настоящее время. Но неизмѣримо, безконечно труднѣе было оно въ старинныя времена и особенно въ началѣ среднихъ вѣковъ. Тогда изъ столкновенія римской и арабской учености не успѣло еще выработаться сколько-нибудь сносной системы, да кромѣ того, самъ характеръ преподаванія, котораго держались тогда въ монастырскихъ школахъ, былъ сухъ, безсердеченъ, неприноровленъ къ силамъ дѣтей, и требовалъ отъ нихъ нечеловѣческаго напряженія. Тотъ, кто оказывался въ состояніи понимать дѣленіе, признавался чуть не геніемъ и ему давали почетный титулъ «доктора абака», въ родѣ нашего «доктора математики» или «доктора медицины». Нормальнымъ, заурядным дѣтямъ нечего было и мечтать о такомъ трудномъ, мудреномъ дѣйствіи, и они скромно ограничивались сложеніемъ и вычитаніемъ, съ придачей таблицы умноженія. Вотъ что значило неумѣнье преподавать, отсутствіе понятныхъ учебниковъ и усложненность вычисленій. Вотъ откуда пошло вредное повѣрье, будто для математики надо родиться со спеціальными способностями, и что кто не рожденъ математикомъ, тотъ не будетъ въ ней успѣвать, несмотря на свое стараніе и на искусство учителя. Смѣшно теперь слышать, что средневѣковые педагоги требовали прирожденныхъ способностей для умноженія и дѣленія: вѣдь, въ наше время съ ними удачно справляется всякій мальчикъ въ сельской школѣ и всякая дѣвочка; но курьезъ сохраняется и въ наши дни, когда съ авторитетнымъ видомъ заявляютъ, что для алгебры и геометріи нужны какія-то особыя исключительно математическія способности. Онѣ, конечно, нужны, но лишь въ такой мѣрѣ, въ какой и для всякаго учебнаго предмета, и виной неуспѣха слѣдуетъ признать, обыкновенно, не отсутствіе способностей, а плохое преподаваніе, особенно вначалѣ, когда разрабатываются элементы, основы предмета, и когда зарождается расположеніе къ нему. Стоитъ только, вмѣсто расположенія и пониманія возбудить отвращеніе и непониманіе, и дѣло пропало, при томъ пропало болѣе, чѣмъ въ какомъ бы то ни было другомъ предметѣ, потому что въ математикѣ все послѣдующее вытекаетъ изъ предыдущаго, и если только зародышъ слабъ, то и весь организмъ будетъ хилымъ.

Перейдемъ теперь къ способамъ дѣленія и разберемъ ихъ по порядку.

1) Объясненіе дѣленія начнемъ съ нашего способа и прежде всего замѣтимъ, что имя ему было «золотой» способъ за его удобства и «французскій» за то, что французы предпочитали его болѣе всего. Первые намеки на него мы можемъ видѣть у Альхваризми, араба, жившаго въ IX в. по Р. Х. Въ болѣе ясной формѣ онъ встрѣчается у индуса Баскары (XII в. по Р. Х.). Въ нѣмецкой литературѣ можно указать на рукопись, найденную въ мюнхенской библіотекѣ и принадлежащую къ XII вѣку. Въ ней вычисленія располагаются колоннами, при чемъ вверху колоннъ подписано римскими цифрами ихъ значеніе, такъ что въ сущности здѣсь идетъ вычисленіе на абакѣ. Примѣръ: 100000:20023=4 и ост. 19908.

СМ.	ХМ.	М.	С.	Х.	1.	
	2			2	3	дѣлитель
	2					высшій разрядъ дѣлителя
1						дѣлимое
	2		1			остатокъ
	1	9	9			остатокъ въ иномъ видѣ
				8		произведеніе 4 × 20
	1	9	9	2		
				1	2	произвед. 4 × 3
	1	9	9		8	остатокъ
					4	частное.

Порядокъ дѣйствія, какъ видимъ, такой: подписавши дѣлителя и его высшій разрядъ, помѣщаемъ подъ нимъ дѣлимое 100000 и задаемся цифрой частнаго: она не будетъ 5, потому что въ дѣлителѣ кромѣ 20000 есть еще другіе разряды, слѣд. цифра частнаго будетъ 4: такъ какъ $2 \times 4 = 8$, а $10 - 8 = 2$, то остатокъ послѣ высшаго разряда дѣлителя, умноженнаго на частное, составитъ 2; далѣе множимъ на частное десятки дѣлителя, ихъ всего 2, $2 \times 4 = 8$, но чтобы вычесть 8 дес. изъ 20000, надо сперва 20000 замѣнить черезъ $19900 + 100$ и тогда легко становится отнять 80 отъ 100, остатокъ будетъ 20; наконецъ, $3 \times 4 = 12$, вычитаемъ 12 изъ 20, получаемъ 8, а всего послѣ дѣленія имѣемъ въ остаткѣ 19908. Частное пишется въ самомъ низу. Вообще во всемъ этомъ примѣрѣ мы наблюдаемъ ходъ дѣйствія такой же, какъ и у насъ, но въ подробностяхъ много особеннаго: не пишется нулей, потому что мѣста цифръ достаточно указываются надписями надъ колоннами; не по нашему расположены дѣлимое, дѣлитель и частное; умноженіе идетъ съ высшихъ разрядовъ; вычитаніе производится постепенно, разрядъ за разрядомъ, какъ только они образуются.

2) Слѣдующій разъ мы встрѣчаемся съ этимъ способомъ уже въ XV—XVI в. А какъ же вычисляли въ промежуткѣ между XII и XVI вв.? Кстати, какъ вычисляли до XII вѣка, вѣдь, очевидно, и тогда было дѣленіе. Конечно, вычисляли, но только не по нашему пріему, а совсѣмъ по другому, непохожему, который развивался и удерживался вплоть до XIX вѣка и въ началѣ его исчезъ: о немъ рѣчь будетъ впереди, теперь же приведемъ образецъ нашего дѣленія, который встрѣчается у Луки де-Бурго, итальянца. Раздѣлить требуется 97535376 на 9876, получится въ частномъ 9876. Расположеніе то же, что и у насъ, только дѣлитель и частное пишется вверху, а не сбоку.

```
9876    9876
97535376
88884
 86513
 79008
  75057
  69132
   59256
   59256
```

3) Въ знаменитомъ трудѣ по ариѳметикѣ, который у арабовъ считается образцовымъ, классическимъ, и который принадлежитъ Бэга-

эддину (1547—1622), встрѣчается такое расположеніе: (975741 : 53 = = 18410).

	1	8	4	1	0
9	7	5	7	4	1
5	3				
4	4				
4	0				
	4				
	2	4			
	2	1			
	2	0			
		1			
		1	2		
			5		
			5	3	
				1	1
				5	3
			5	3	
		5	3		
	5	3			
5	3				

Частное пишется въ самомъ верху. Цифры дѣлимаго не сносятся внизъ, но вмѣсто этого чертятся, для удобства, колонны, чтобы не сбиться въ цифрахъ. Оба разряда дѣлителя, 5 дес. и 3 ед., помножаются отдѣльно на частное и отдѣльно же вычитаются. Дѣлитель переписывается столько разъ, сколько разрядовъ въ частномъ. Здѣсь повторяется опять то же, что мы видѣли и въ умноженіи, гдѣ множитель переписывался нѣсколько разъ. Причина опять та же, что и въ умноженіи, и заключается она въ слѣдующемъ. Способъ Бэгаэддина получилъ начало, очевидно, еще тогда, когда вычисленія шли на абакѣ, покрытомъ пескомъ, и когда, слѣд., легко было дѣлителя стереть и его же переписать снова, расположивши снова подъ тѣми разрядами, которые дѣлятся; съ теченіемъ времени абакъ былъ оставленъ, математики стали пользоваться бумагой, а между тѣмъ манера переписыванія все еще сохранилась и привела къ большимъ неудобствамъ, къ затратѣ лишняго труда, къ потерѣ времени и мѣста. Вотъ что значитъ инерція, не просвѣтленная лучами разума!

4) Апіанъ въ XVI ст. даетъ такое же расположеніе, какое дали бы и мы, но только онъ подписываетъ числа не разрядъ подъ разрядомъ, а просто крайнюю цифру подъ крайней. Раздѣлить 97535376 на 9876, получится 9876. Пишется дѣлимое, подъ нимъ дѣлитель, а частное сбоку.

abc
97535376 (9876
9876
88884
86513a
79008
75057b
69132
59256c
59256

5) Тарталья, изобрѣтательный итальянскій математикъ XVI в., не только учившій по старинѣ, но и отъ себя предлагавшій много оригинальныхъ и удобныхъ пріемовъ, для большей ясности расчленяетъ дѣйствіе на рядъ отдѣльныхъ вычисленій, смотря по тому, сколько цифръ въ частномъ.

Вотъ, *какъ онъ выполняетъ дѣленіе* 2596860019 на 38784.

I. 259686 (6
232488
27198

II. 271980 (7
271236
744

III. 7440 (0

IV. 74401 (1
38748
35653

V. 356539 (9
348732
7807

Частное 67019, остатокъ 7807. При этомъ Тарталья говоритъ, что хорошо бы передъ дѣленіемъ заготовлять произведенія дѣлителя на всѣ однозначныя числа: тогда виднѣе было бъ, какою цифрою *задаваться въ частномъ, да и не нужно составлять отдѣльно произведеній* дѣлителя на цифры частнаго, такъ-какъ они ужъ есть, и останется прямо вычитать.

6) Клавіусъ въ XVII ст. вводитъ нашъ знакъ дѣленія (при по-

моши угла), но числа при дѣленіи располагаетъ не по нашему. Примѣръ: 1902942 : 2978 = 639.

$$\begin{array}{rl} 2978 & \\ 1902942 & 639 \\ 1161.. & 17868 \\ 2680. & 8934 \\ & 26802 \end{array}$$

7) Вендлеръ, нѣмецкій педагогъ XVII в., употребляетъ почти нашъ пріемъ, съ тою только разницей, что дѣлитель и частное у него ставятся по обѣимъ сторонамъ дѣлимаго.

$$\begin{array}{r|r} 486 & 225504 \quad 464 \\ & \underline{1944} \\ & 311 \\ & 2196 \\ & 194 \\ & \underline{1944} \end{array}$$

Кромѣ того, цифры дѣлимаго не сносятся, а остаются на своемъ прежнемъ мѣстѣ вверху.

8) Пешекъ въ XVIII ст. вычисляетъ такъ же, какъ и Вендлеръ. Пешекъ даетъ нашему способу названіе французскаго.

9) Бартъ въ XVIII ст. пишетъ дѣлителя подъ дѣлимымъ при всякомъ частномъ дѣленіи, слѣд. столько разъ, сколько разрядовъ въ частномъ. $66734 : 325 = 205\frac{109}{325}$.

$$\begin{array}{r} 66734 \\ 325 \\ \underline{650} \\ 1734 \\ 325 \\ \underline{1625} \\ 109 \end{array}$$

10) Въ русскихъ математическихъ рукописяхъ XVII столѣтія встрѣчаются, какъ и слѣдовало ожидать, тѣ же самые пріемы, какіе выработала Западная Европа. Они перешли къ намъ черезъ Польшу, такъ какъ именно польская ученость давала пищу русской образо-

ванности XVII вѣка. Чаще всего въ это время встрѣчается способъ Апіана (см. выше, 4). У Магницкаго, стр. к на оборотѣ представлено дѣленіе въ такомъ видѣ.

```
6
5175 { 345
1555
4505
 11
 67
```

Здѣсь дѣлимое 5175 помѣщено во второй строкѣ, частное справа, дѣлитель 15 переписывается трижды (въ третьей и пятой строкахъ), четвертая и шестая строка отведены частнымъ произведеніямъ, а верхняя—остатку отъ вычитанія. Изъ этого видно, что цифры расположены довольно несистематично и неудобно, такъ что сбиться въ нихъ очень легко. Но, по правилу, „изъ двухъ золъ выбирай меньшее“, Магницкій очень доволенъ этимъ способомъ и одобряетъ его въ слѣдующихъ выраженіяхъ: „Мнози убо дѣлятъ перечни сицевымъ образомъ: егда дѣлителемъ емлютъ, изъ числъ дѣлимаго, и написавши за чертою, умножаютъ имъ весь дѣлитель, и подписавши вычитаніемъ, вычитаютъ изъ дѣлимаго. И намъ видится, сицевымъ образомъ есть удобнѣйше, но тѣмъ иже слабѣйшее разумѣніе и тщаніе имутъ: зане не толикаго есть домышленія, и остроты“. Далѣе у Магницкаго идетъ способъ, похожій на Барта (см. выше, 9), и способъ Вендлера (выше, 7). Вліяніе Вендлера вполнѣ замѣтно въ ариѳметикѣ Василія Адодурова (1740 г.), Румовскаго (1760 г.), Кузнецова (1760 г.). У Загорскаго (1806 г.) является нашъ нормальный способъ во всей чистотѣ.

Австрійскій способъ дѣленія.

Подъ именемъ австрійскаго способа разумѣется такой, который хотя и похожъ на нашъ нормальный, но отличается отъ него большимъ примѣненіемъ устнаго счета. Австрійскій способъ можно считать шагомъ впередъ сравнительно съ нашимъ способомъ; въ немъ меньше письма и самое дѣйствіе совершается, вслѣдствіе этого, гораздо быстрѣе; правда, есть въ немъ и неудобство: именно, человѣкъ, мало-мальски невнимательный, легко въ немъ сдѣлаетъ ошибку и собьется. Для примѣра возьмемъ 167535 : 365. Первая цифра частнаго будетъ 4: составляемъ произведеніе 365 на 4, начиная съ низшихъ разрядовъ, но не подписываемъ этого произведенія подъ дѣлимымъ, а вычитаемъ каждый разрядъ его, какъ только онъ получится, и пишемъ прямо остатокъ: $4 \times 5 = 20$, слѣд. въ остаткѣ 5; $4 \times 6 = 24$, да 2, 26, 6 изъ $7 = 1$, слѣд. въ остаткѣ 1; далѣе $3 \times 4 = 12$ да $2 - 14$, 14 изъ 16 дастъ въ остаткѣ 2; всего получится послѣ вычитанія 215; сносимъ слѣдующую цифру 3 и дѣлимъ новое число 2153 такъ же, какъ и предыдущее, т.-е. одновременно производимъ умноженіе и вычитаніе.

Австрійская метода стала выдвигаться на первый планъ сравнительно недавно, съ средины XIX вѣка, но зачатки ея простираются вплоть до XVII вѣка; еще Вендлеръ даетъ образецъ такого сокращеннаго дѣленія.

```
4564 | 20830096 | 4564
          2574
           2920
            1825
```

Кегель въ XVII ст. даетъ болѣе грубую форму этого способа, такъ какъ онъ начинаетъ умноженіе съ высшихъ разрядовъ, а не съ низшихъ и ему приходится лишній разъ измѣнять цифры. Вотъ какъ у него идетъ дѣленіе 135513 на 21:

```
21 | 135513 | 6453
       1916
        1
```

Наконецъ, Маурахеръ (XVIII в.) пользуется такимъ расположеніемъ вычисленія:

```
8  98760
   18
   --
    27
    --
     36
     --
      40
   -----
   12345
```

При этомъ частное 12345 помѣщается внизу, дѣлитель 8 слѣва, а дѣлимое 98760 правѣе дѣлителя.

Испанскій способъ дѣленія.

Это самая употребительная, самая распространенная форма дѣленія. Теперь ея уже нѣтъ въ учебникахъ и объ ней не вспоминаютъ, но почти въ теченіе тысячи лѣтъ, съ IX вѣка до XIX, она являлась общеизвѣстной и популярной формой. Начало ей положили арабы: черезъ Испанію она была принесена въ западную Европу и потому получила названіе „испанскаго“ способа. Участь его можно сравнить съ той, которую пришлось испытать обученію грамотѣ по методу: „буки азъ ба“. Теперь этотъ методъ отжилъ свой вѣкъ и скоро о немъ, навѣрное, забудутъ, а въ свое время онъ пользовался общепризнаннымъ авторитетомъ и на немъ воспитывался длинный рядъ поколѣній: наши отцы, дѣды и прадѣды, и дѣды нашихъ прадѣдовъ. Тоже случилось съ испанскимъ дѣленіемъ. Сколько надъ нимъ старались, сколько хлопотали надъ его усовершенствованіемъ, а сейчасъ его забыли. Правду сказать, горевать объ этомъ не приходится, потому что—то было дѣленіе длинное, сбивчивое и обильное всякими недоразумѣніями. Надо думать, что корень его скрывается въ индусской математикѣ, судя по тому, что вычислять подобнымъ образомъ очень удобно было на пескѣ, какъ то было принято у индусовъ. Когда же этотъ способъ сталъ примѣняться на бумагѣ, то получилось нѣчто несообразное по основной идеѣ: цифры, которыя слѣдовало стирать, оставались нетронутыми (иногда зачеркивались), нагромождались другъ на друга и давали массу лишняго и безполезнаго письма. Приведемъ примѣры.

1) Примѣръ Альхваризми, араба IX столѣтія. Требуется 46468 раздѣлить на 324, частное 143.

```
      136
       24
     110
      22
    140
    143
    46468
    324
      324
        324
```

Какъ видно, дѣлимое въ срединѣ: подъ нимъ помѣщается дѣлитель и при томъ переписывается столько разъ, сколько цифръ въ частномъ: такое передвиженіе осталось, конечно, отъ вычисленій на пескѣ, когда такъ легко было стирать цифры и писать ихъ еще разъ въ болѣе удобномъ положеніи; первая цифра частнаго будетъ 1, первый остатокъ 140 пишется надъ частнымъ; теперь надо дѣлить 1406 на 324, въ частномъ будетъ 4; умноженіе 324 на 4 идетъ съ высшихъ разрядовъ и одновременно же происходитъ вычитаніе. Вотъ гдѣ, между прочимъ, основаніе для австрійскаго способа, разобраннаго нами выше. Такъ какъ $3 \times 4 = 12$, то вычитаемъ 12 изъ 14-ти и получаемъ 2, которое и пишемъ надъ 4-мя; далѣе $2 \times 4 = 8$, 8 изъ 10 — 2, слѣд. надъ нулемъ надо помѣстить 2, а прежнюю цифру десятковъ 2 надо замѣнить новой 1, написавши эту 1 надъ двумя. Такъ дѣйствіе идетъ до самаго конца, т.-е. умноженіе производится съ высшихъ разрядовъ и сопровождается вычитаніемъ, при чемъ измѣненныя цифры переписываются выше.

2) Альнасави, арабскій писатель XIX вѣка, нѣсколько упрощаетъ письмо и даетъ хоть небольшой просторъ устному счету. 2,852 : 12 онъ рѣшаетъ такъ:

12	
498	237
237	8
2852	12
12	

Интересно отмѣтить, какъ Альнасави изображаетъ частное. Цѣлое число 237 онъ пишетъ вверху, подъ нимъ остатокъ, а подъ нимъ уже дѣлителя: все это считается обозначеніемъ смѣшанной дроби $237\frac{8}{12}$.

Греческій монахъ Максимъ Планудесъ, одинъ изъ немногихъ представителей византійской учености, даетъ еще болѣе легкій образецъ дѣленія, но, конечно, Планудесъ потому такъ легко справляется, что примѣръ-то самъ по себѣ не замысловатъ. $4865 : 5 = 973$. Вычисленіе идетъ такъ:

31
4865
973
5

4) Алькальцади, жившій въ XV ст., хотя и является заключительнымъ звеномъ въ блестящей цѣпи арабскихъ математиковъ, но все-таки не можетъ обойтись безъ того, чтобы не переписать дѣлителя нѣсколько разъ даже въ легкомъ примѣрѣ. 924 : 6 у него представляется въ такомъ видѣ:

```
 32
924
666
———
154
```

Частное въ самомъ низу, дѣлитель надъ нимъ, еще выше дѣлимое и, наконецъ, въ самой верхней строкѣ послѣдовательные остатки.

5) Петценштейнеръ въ XV ст., нѣмецкій педагогъ, нисколько не измѣняетъ основного хода дѣйствія и всего только вводитъ ту подробность, что пишетъ частное справа за чертой. Дано раздѣлить 467 на 19.

```
  1
  4
281 |
467 | 24.
199 |
  1
```

Получается довольно красивое расположеніе, съ ясной наклонностью къ симметріи. Начиная съ этихъ поръ, математики обращаютъ вниманіе на то, чтобы груда цифръ не представляла собой чего-то безпорядочнаго и несимметричнаго, а образовывала изящную фигуру, построенную по извѣстной идеѣ. Особенно любили изощряться надъ построеніемъ фигуръ итальянцы, и надо отдать имъ справедливость, что они много успѣли въ этой безполезной и даже вредной игрѣ; вѣдь всякая погоня за ненужнымъ и постороннимъ вредитъ, въ концѣ концовъ, главной и существенной цѣли; такъ и здѣсь, одинъ авторъ передъ другимъ старались придумать что-нибудь оригинальное, красивое и стройное по внѣшнему виду, но забывали главное достоинство, т.-е. быстроту вычисленій, удобство и вѣрность.

6) Лука-де-Бурго ухитрился представлять дѣленіе фигурой корабля съ трюмомъ, рулемъ, мачтами и парусами.

```
     00
     150
     765
    08290
    14544
    861022
   0975565
   16301573 |
   97535399 |  9876
    9876666 |
     98777
      988
       9
```

Дальше этого идти ужъ трудно и путь всевозможныхъ ухищреній можно считать исчерпаннымъ. Хорошо еще, что педагоги тогдашняго времени большею частію не неволили учениковъ къ тому, чтобы они непремѣнно умѣли строить эти изящныя фигуры; они обыкновенно предпочитали только хвастаться другъ передъ другомъ, кто сколько знаетъ способовъ и кто сколько изобрѣлъ.

Какъ видимъ изъ фигуры, частное 9876 стоитъ съ правой стороны у знака дѣленія (угла); лѣвѣе, въ одной съ нимъ строкѣ, располагается дѣлимое; что же касается дѣлителя 9876, то онъ помѣщенъ четыре раза: первый разъ подъ дѣлимымъ, второй разъ онъ расчлененъ на 987 и 6, третій разъ на 98, 7 и 6, и, наконецъ, въ послѣдній разъ на 9, 8, 7 и 6, при чемъ 9 стоитъ въ самомъ низу, 8 во второй строкѣ снизу, 7 въ третьей снизу, и 6 въ четвертой, подъ дѣлимымъ, на самомъ правомъ мѣстѣ. Дѣйствіе начинается съ того, что 97535 дѣлится на 9876, въ частномъ получается 9; теперь надо 9876 умножить на 9 и полученное произведеніе вычесть изъ 97535, при чемъ умноженіе начинается съ высшихъ рязрядовъ, вычитаніе производится одновременно съ нимъ. $9 \times 9 = 81$, 8 изъ $9 - 1$, 1 пишемъ надъ 9-ю, 1 изъ $7 = 6$, пишемъ 6 надъ 7-ю; далѣе $8 \times 9 = 72$, вычитаемъ 7 изъ 16-ти, получается 9, пишемъ эти 9 надъ 6-ю, а надъ единицей пишемъ 0; такъ продолжаемъ вычисленіе все далѣе и далѣе, до тѣхъ поръ, пока не кончимъ его

Требуется большая, можно сказать, необыкновенная внимательность, чтобы не сбиться и не спутать въ такомъ рядѣ вычисленій. Положимъ, что передвиженіе дѣлителя помогаетъ разбираться скорѣе и вѣрнѣе въ разрядахъ, но все-таки избѣжать ошибокъ очень трудно, а между тѣмъ, стоитъ только допустить ошибку, и все кончено: все надо передѣлывать снова, потому что выдѣлить вѣрное отъ невѣрнаго нельзя. Если же къ этому еще вспомнить, что при дѣленіи легко попасть на цифру частнаго, которая слишкомъ велика или слишкомъ мала, то мы вполнѣ себѣ представимъ, сколькихъ попытокъ и при томъ какихъ отчаянныхъ попытокъ стоило вѣрное вычисленіе частнаго. Современники передаютъ, что, чтобы рѣшить примѣръ на дѣленіе, — на это требовалось сутки времени. Не даромъ Гербертъ (папа Сильвестръ II), жившій, правда, нѣсколько ранѣе разсматриваемаго періода, считалъ возможнымъ преподавать ариѳметику только особенно одареннымъ ученикамъ. Святой Бонифацій пишетъ, что «при одной мысли о математическихъ наукахъ у меня отъ страха захватываетъ дыханіе. Передъ ними вся грамматика, реторика и діалектика—просто дѣтская забава».

7) Французскій математикъ Ла-Рошъ (въ XVI ст.) понялъ, что выгоднѣе начинать умноженіе съ низшихъ разрядовъ, потому что тогда будетъ легче вычитать: но и отъ стараго пріема онъ не рѣшается отказываться, поэтому даетъ и то и другое расположеніе, начиная въ первомъ случаѣ умноженіе съ низшихъ разрядовъ, а во второмъ съ высшихъ. Пусть будетъ дѣлимое 7985643, дѣлитель 1789, тогда въ частномъ получится 4463.

```
а)      1
        6
     1143
    829736
   7985643
  4463
        1789
```

```
б)      1
        3
       16
       573
      1126
      44473
     182726
     3169006
     7985643
     4463
        1789
```

Ла-Рошъ стремится, очевидно, къ тому, чтобы получить красивую фигуру треугольника: онъ не прочь, подобно Лукѣ-де-Бурго, пожертвовать удобствомъ вычисленій въ пользу второстепенной цѣли — изящества.

Бешенштейнъ и Ризе, нѣмецкіе педагоги XVI ст., даютъ подобные пріемы дѣленія.

124620 : 18 = 6923	10734 : 6 = 1789	572832 : 72
1723	455	44
66466	10734	655
124620 (6923	6666	8801
18888		572832
111		72222
		777

8) Штифель и Петръ Рамусъ дѣлаютъ попытки помочь вычисленію и предлагаютъ: Штифель—вычитать частныя произведенія сразу, послѣ того, какъ они уже составлены, а не по отдѣльнымъ разрядамъ, какъ только они получаются: Рамусъ—заготовлять заранѣе произведенія дѣлителя на всѣ однозначныя числа. «Правда, это кропотливо, — говоритъ онъ,—но за то полезно».

9) Изложенный способъ дѣленія, испанскій, какъ называетъ его Пешекъ, отличается той характерной чертой, что всѣ промежуточныя вычисленія пишутся выше дѣлимаго, поэтому онъ получилъ у нѣмецкихъ математиковъ названіе дѣленія «вверху»—«ueberwärts» или «uebersich»—«dividieren», въ противоположность нашему нормальному пріему, которому придали названіе дѣленія «внизу», на томъ основаніи, что все вычисленіе сосредоточивается ниже дѣлимаго.

Дѣленіе «вверху», какъ мы уже упоминали, являлось самой распространенной и употребительной формой вплоть до начала XIX-го вѣка. Къ этому времени были сознаны, наконецъ, его неудобства и оно мало-по-малу стало уступать свое мѣсто нормальному, практикуемому въ настоящее время, пріему. Въ русскихъ ариѳметикахъ XVII вѣка находимъ такой примѣръ дѣленія: $5692597 : 3625 = 1570\frac{1347}{3625}$

41
2533
5656
207704
5692597
1570
3625555
36222
366
3

Въ сущности, тотъ же ромбъ, что и выше. У Магницкаго вычисленіе въ этомъ же родѣ, при чемъ частное располагается съ правой стороны и отдѣляется скобкой. 964 9378 : 5634.

3
14
259
710
59427
4015530
9649378 (1712
5634444
56333
566
5

Выпишемъ кстати изъ Магницкаго объясненіе, которое онъ проводитъ на примѣрѣ 1952 : 32. «Подобаетъ вѣдати, яко егда дѣлитель имѣетъ не едино число, но два 3, 4, или три 4 3 2, и тогда такожде подписуются числа дѣлителя, подъ болшая себе, дѣлимаго сице. 1952.
32

И умествуется тако: яко елико первымъ числомъ дѣлителя, емлеши изъ верхнихъ числъ дѣлимаго толикожде бы взяти, и другимъ числомъ дѣлителя, изъ тѣхъ же числъ дѣлимаго, якоже здѣ:

1
1952 (6.
32

Изъ 19 взяти на 3, по 6: по толику же бы взяти, и изъ 15, на 2: и останется изъ 15, 3, еже напиши надъ 5-ю, а прочая похѣрь сице

13
1952 (6
32

(всѣ цифры, кромѣ 3, 2 и 6, перечеркиваются).

Потомъ напиши первое число дѣлителя, противъ остаточныхъ 3-хъ дѣлимаго, а другое дѣлителя въ рядъ къ правой рукѣ яковъ здѣ.

13
1952 (6
322
3

И уметвуй 3 дѣлителя изъ 3-хъ дѣлимаго, и будетъ 1: и сей 1, напиши подлѣ 6 за чертою, а другимъ числомъ дѣлителя 2-мя возми изъ 2 дѣлимаго 1 который уже за чертою написанъ сице:

13
1952 (61 толико пришло изъ 1952 на 32.
322
3

10) Въ заключеніе приведемъ изъ Магницкаго «пнъ изящнѣйшій образецъ дѣленія, зане во единомъ семъ образцѣ сугубое дѣйство, сирѣчь съ дѣленіемъ и повѣреніе: яко же явлено есть.

4
1736
56092
59843
678 (882
5424
5424
1356
436 оставшее.
598432 вѣрно раздѣлено.

Въ этомъ примѣрѣ требуется 598432 раздѣлить на 678; въ частномъ получится 882 и въ остаткѣ 436. Дѣлитель 678 пишется только одинъ разъ и въ этомъ обстоятельствѣ мы должны видѣть большой успѣхъ. Первымъ неполнымъ дѣлимымъ является число 5984; когда его раздѣлимъ на 678, то получимъ въ частномъ 8, составляемъ теперь произведеніе 678 на 8, при чемъ умноженіе ведемъ съ низшихъ разрядовъ: это опять-таки полезная подробность: восемью восемь 64, 4 изъ 4 будетъ 0, пишемъ 0 надъ 4-мя; семью восемь 56, да 6,—62, вычитаемъ 2 изъ 8-ми, будетъ 6, пишемъ 6 надъ 8-ю; шестью восемь 48, да 6,—54, вычитаемъ 54 изъ 59, останется 5.

Такимъ путемъ ведемъ мы дѣйствіе до самаго конца и находимъ въ отвѣтѣ 882. Что касается «повѣренія», т.-е. повѣрки, то она состоитъ въ перемноженіи дѣлителя и частнаго, при чемъ 678 . 8 =

= 5424. 678 . 8 — 5424, 678 . 2 — 1356, къ этому присоединяется остатокъ отъ дѣленія, который равенъ 436, и всего составится 598432.

Римскій способъ дѣленія.

Римляне были расположены къ счету круглыми числами, и поэтому они любили замѣнять числа, близкія къ круглымъ, при посредствѣ этихъ круглыхъ. Примѣровъ этому можно привести очень много, хотя бы: 18 по ихъ нумераціи выражается черезъ 20 безъ двухъ, 90 черезъ сто безъ десяти и т. д. Естественно поэтому ожидать, что подобная наклонность къ круглымъ числамъ будетъ проявлена и при дѣленіи. Примѣръ 668 : 6 рѣшается по римскому способу слѣдующимъ образомъ. Дѣлимъ 668 не на 6 равныхъ частей, а на 10, тогда въ каждой части будетъ по 6 десятковъ: но вѣдь мы взяли 4 лишнихъ части, и въ каждой по 6 десятковъ, всего, слѣд., взяли лишняго 24 десятка, эту сдачу надо приложить опять къ дѣлимому, будетъ 308. Дѣлимъ теперь 30 десятковъ на 10, будетъ въ каждой части по 3 десятка, и такъ какъ лишнихъ частей взято опять 4, то онѣ составятъ 12 дес., а поэтому всего осталось подѣлить число 128. Изъ этого 12 дес. при дѣленіи на 10 дадутъ въ каждой части по 1 дес. и сдачи образуется 4 дес. Всего мы, слѣд., набрали въ частномъ 6 д. + 3 д. + 1 д. = 10 дес., или 100. Теперь надо 68 дѣлить на 6. Продолжаемъ это дѣлать тѣмъ же самымъ пріемомъ, какимъ вели и до сихъ поръ, именно: 60 : 10, будетъ по 6 ед., сдачи $4 \times 6 = 24$, да 8, всего 32: дѣлимъ 32 на 10, будетъ по 3, сдачи $3 \times 4 = 12$, да 2, всего 14; дѣлимъ 14 на 10, будетъ по 1 единицѣ, сдачи 4, да 4, всего 8, теперь число уже не дѣлится на 10 и поэтому остается только вспомнить настоящаго дѣлителя 6 и раздѣлить на него, будетъ въ частномъ 1 и въ остаткѣ 2. Подсчитаемъ итогъ, сколько мы набрали всего-на-всего единицъ: $6 + 3 + 1 + 1 = 11$, и въ остаткѣ 2: десятковъ мы выше насчитали 10 и слѣд. окончательный отвѣтъ представится въ видѣ $100 + 11$, т.-е. 111 и ост. 2. Вотъ какой длинный и кропотливый путь. Онъ составляетъ характерную принадлежность римской ариѳметики, особенно же времени упадка Рима и перехода римской цивилизаціи къ народамъ Западной Европы. Особенно подробно разработанъ этотъ способъ у Боэція (470 — 525 по Р. Х.), знатнаго и ученаго римскаго гражданина, и у Герберта (папы Сильвестра II), жившаго около 1000 года по Р. Х. Послѣ Герберта этотъ способъ сталъ все болѣе и болѣе вытѣсняться арабскими пріемами, т.-е. такими, которые близки къ нашему нормальному дѣленію. Не даромъ съ этихъ поръ стали называть способъ Боэція «желѣзнымъ правиломъ», въ отличіе отъ «золотого» подъ которымъ чаще всего разумѣли «дѣленіе вверху» (см. на стр. 98).

Труденъ и очень труденъ былъ римскій способъ, значительно труднѣе, чѣмъ «дѣленіе внизу» и «дѣленіе вверху».

Обременительность его зависѣла прежде всего отъ его сложности, но кромѣ того, еще и отъ того, что педагоги и составители учебниковъ или не умѣли, или не хотѣли объяснить дѣло, какъ слѣдуетъ. Высокимъ, ученымъ слогомъ, безъ обращенія къ чему-нибудь наглядному и понятному, они вели бесѣду такъ, какъ будто передъ ними находились то же ученые люди или педагоги, а не малыя дѣти; тогдашняя школа мѣряла все на аршинъ учителя и не примѣнялась къ возрасту и развитію ученика.

Вотъ выписка изъ книжки Сперанскаго (Очерки по исторіи народной школы въ Западной Европѣ, стр. 118, заимств. изъ Гюнтера): При дѣленіи 5069 на 4, дѣйствія располагаются слѣдующимъ образомъ. Мы имѣемъ: $10 - 4 = 6$, $\frac{5000}{10} \cdot 6 = 3000$. Образуемъ теперь произведеніе $\left(\frac{3000}{10} = 300\right) \cdot 6 = 1800$, $\left(\frac{1000}{10} = 100\right) \cdot 6 = 600$, откуда мы получаемъ $600 + 800 = 1400$. Точно также: $\left(\frac{1000}{10} = 100\right) \cdot 6 = 600$, $600 + 400 = 1000$. Пользуясь все тѣмъ же пріемомъ, вычисляемъ произведеніе $\left(\frac{1000}{10} = 100\right) \cdot 6 = 600$, $\left(\frac{600}{10} = 60\right) \cdot 6 = 360$, $\left(\frac{300}{10} = 30\right) \cdot 6 = 180$, $\left(\frac{100}{10} = 10\right) \cdot 6 = 60$ и образуемъ сумму $60 + 80 + 60 + 60 = 260$. Далѣе: $\left(\frac{200}{10} = 20\right) \cdot 6 = 120$, $\left(\frac{100}{10} = 10\right) \cdot 6 = 60$, а $60 + 20 + 60 = 140$. Двигаясь тѣмъ же путемъ далѣе, мы получимъ: $\left(\frac{100}{10} = 10\right) \cdot 6 = 60$, $40 + 60 = 100$, $\left(\frac{100}{10} =\right.$

$= 10\Big)\cdot 6 = 60$, $\Big(\frac{60}{10} = 6\Big)\cdot 6 = 36$, $\Big(\frac{30}{10} = 3\Big)\cdot 6 = 18$, $\Big(\frac{10}{10} = 1\Big)\cdot 6 = 6$; $6 + 8 + 6 + 9 = 29$. Затѣмъ находимъ $\Big(\frac{20}{10} = 2\Big)\cdot 6 = 12$; $\Big(\frac{10}{10} = 1\Big)\cdot 6 = 6$; $6 + 2 + 9 = 17$; $\Big(\frac{10}{10} = 1\Big)\cdot 6 = 6$; $7 + 6 = 13$; $\Big(\frac{10}{10} = 1\Big)\cdot 6 = 6$; $3 + 6 = 9$; эта сумма, подобно дѣлителю, является уже числомъ меньшимъ 10-ти. Такимъ образомъ оказывается, что остатокъ отъ дѣленія равенъ 1. Искомое частное 1267. Первоначально римскій способъ примѣнялся на абакѣ, при помощи римскихъ цифръ; но съ теченіемъ времени, когда въ Европу проникли арабскія цифры, онъ сталъ примѣняться и на нихъ и долго не уступалъ своего мѣста новымъ пріемамъ. Теперь онъ уже совершенно оставленъ и рѣшительно нигдѣ не встрѣчается. А между тѣмъ и у него есть нѣкоторое удобство, которое возвышаетъ его въ этомъ отношеніи: именно легкое угадываніе цифръ частнаго. Въ нашемъ нормальномъ дѣленіи иногда случается задаваться не тою цифрою, какая нужна, а большей или меньшей: у римлянъ же это могло случаться *гораздо рѣже, потому что дѣлителемъ у нихъ всегда служило* круглое число, про которое легко найти, сколько разъ оно содержится въ дѣлимомъ.

Приведемъ образцы письменнаго расположенія по этому способу. Примѣры: 672 : 16 и 3276 : 84.

16 : 672 = 30	84 : 3276 = 30
(20)	(100)
600	3000
72	276
+ 120	+ 480
192 = 9	756 = 7
(20)	(100)
180	700
12	56
+ 36	+ 112
48 = 2	168 = 1
(20)	(100)
40	100
8	68
8	16
16 = 1 42.	84 = 1 39.
(16)	(84)

Другіе способы дѣленія.

1 Самымъ простымъ, общедоступнымъ путемъ дѣленія, правда длиннымъ и утомительнымъ, является замѣна дѣленія вычитаніемъ; поэтому всѣ народы, которые находятся на низшихъ ступеняхъ развитія, производятъ дѣленіе при помощи вычитанія: поэтому также полезно было бы давать и малымъ дѣтямъ нѣсколько упражненій на послѣдовательное вычитаніе, прежде чѣмъ переходить съ ними къ дѣленію. Примѣровъ замѣны дѣленія вычитаніемъ можно указать много у разныхъ народовъ. особенно же среди мало образованныхъ классовъ. Такъ, въ средніе вѣка въ Германіи среди простого народа часто употреблялся счетъ на маркахъ, т.-е. на костяшкахъ—костяшки эти клались въ колонны, въ особую колонну для каждаго разряда—въ такомъ случаѣ дѣлитель откладывался отъ дѣлимаго столько разъ, сколько было возможно, и число отложенныхъ дѣлителей показывало величину отвѣта, потому что раздѣлить = значитъ узнать, сколько разъ дѣлитель содержится въ дѣлимомъ.

2) Замѣна дѣленія умноженіемъ нѣсколько труднѣе, чѣмъ замѣна его вычитаніемъ; она не такъ доступна, понятна и наглядна: ее мы встрѣчаемъ на тѣхъ ступеняхъ развитія науки, когда совершается переходъ отъ простонародныхъ пріемовъ вычисленія къ точнымъ научнымъ пріемамъ. Такъ. напр., у индусовъ до выработки нормальныхъ способовъ дѣленія мы видимъ массу попытокъ привести его къ умноженію: при этомъ и само умноженіе совершается такимъ искусственнымъ порядкомъ, какой встрѣчается еще въ глубокой древности у египтянъ, распространенъ былъ среди всѣхъ народовъ и пользуется до сегодня популярностью среди самоучекъ и немудрыхъ счетчиковъ. Для поясненія беремъ примѣръ у Евтокія, греческаго писателя въ VI в. по Р. Х. Требуется раздѣлить 6152 на 15. Для этого Евтокій составляетъ рядъ чиселъ. кратныхъ 15-ти : 15, 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240, 270, 300, 600, 900, 1200, 1800, 2100, 2400, 2700, 3000, 6000. Рядъ этотъ, какъ видимъ, содержитъ не всѣ кратныя числа, но онъ только пролагаетъ путь къ тому, чтобы догадаться, что 6000 кратно 15. и что въ 6000 содержится 15 четыреста разъ. Остается теперь раздѣлить 152 на 15. Для этого Евтокій снова со-

ставляетъ подобный же рядъ: 15, 30, 60, 90, 150 и выводитъ, что 15 въ 150-ти содержится 10 разъ. Всего въ отвѣтѣ получится 410 и 2 въ остаткѣ.

3) Слѣдующей попыткой къ упрощенію дѣленія является расчлененіе дѣлителя на производителей: оно и теперь примѣняется съ большимъ успѣхомъ, особенно при устномъ счетѣ: именно, чтобы раздѣлить, напр., на 8, можно раздѣлить данное число пополамъ, полученный отвѣтъ опять пополамъ и вновь полученный отвѣтъ еще разъ пополамъ. Для письменнаго вычисленія такой порядокъ особенно рекомендуется итальянцемъ Леонардо Фибоначчи (около 1200 г. по Р. Х.); при этомъ, въ случаѣ дробнаго частнаго, у него получается рядъ дробей съ возрастающими знаменателями.

Оригинальный пріемъ, основанный на той же идеѣ, даетъ Апіанъ (XVI в. по Р. Х.): у него проскальзываетъ нѣчто въ родѣ десятичныхъ дробей, хотя въ его время теорія десятичныхъ дробей находилась въ самомъ зачаточномъ состояніи.

Положимъ, ему надо раздѣлить 11664 на 48; онъ сперва вычисляетъ 11664 : 6, потомъ отъ каждаго полученнаго разряда беретъ восьмую долю, это легко достигается тѣмъ, что каждый разрядъ помножается на 0125, такъ какъ 1 : 8 = 0,125. Все дѣйствіе можно представить въ такомъ видѣ:

```
  522
11664
 0125
 0062 | 5
  05
   05
    0 | 5
  243
```

Объясняется это вычисленіе слѣдующимъ образомъ. Дѣлимъ 11 тыс. на 6, получаемъ 5 въ остаткѣ и 1 въ частномъ; 5 пишемъ надъ 1, а единицу частнаго умножаемъ на 0125 и пишемъ прямо подъ чертой. Далѣе, 56 сот. : 6 = 9 сот. и 2 сотни въ остаткѣ; остатокъ помѣщаемъ надъ 6-ю, а 9 надо умножить на 0125; для этого Апіанъ множитъ отдѣльно 0125 на 5 и на 4, получаетъ 0625 и 05; при записываніи цифра 5 у числа 0625 подвигается вправо за черту, потому что это будутъ уже не цѣлыя единицы, а только десятыя доли. Теперь 26 десятковъ надо дѣлить на 6, будетъ въ частномъ 4 десятка: помножить 4 на 0125, получится 5 — столько простыхъ единицъ, ихъ пишемъ. Наконецъ, $24 : 6 = 4$, $4 \times 0125 = 5$, это будутъ десятыя доли, и ихъ слѣдуетъ писать за чертой вправо. Остается сложить всѣ отдѣльныя частныя и, тогда получится общій отвѣтъ 243.

4) Всѣ три предыдущихъ способа уступаютъ нашему, которымъ мы обыкновенно пользуемся: они труднѣе и длиннѣе нашего. Но вотъ методъ Тиллиха, предложенный имъ въ 1806 г. Онъ уже вытекаетъ изъ нормальнаго пріема и стремится еще болѣе его усовершенствовать. Суть его состоитъ въ слѣдующемъ. При дѣленіи на однозначное число, напр., на 3, не сносятъ остатковъ къ слѣдующему низшему разряду, а стараются раздѣлить каждый разрядъ вполнѣ, хотя бы для этого пришлось воспользоваться и дробнымъ частнымъ. Согласно этому, дѣйствіе $56789 : 3$ располагается такъ:

$$\begin{array}{cccccc|l} ^1/_3 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 12223 \\ & ^2/_3 & 0 & ^1/_3 & ^2/_3 & 0 & \underline{\ \ 6706^2/_3} \\ & & & & & & 18929^2/_3 \end{array}$$

Прежде всего дѣлится 5 дес. тысячъ на 3, на каждую часть придется по $1^2/_3$ дес. тысячъ, изъ этого 1 дес. тыс. сносится въ частное, а $^2/_3$ дес. тыс. пока оставляются. Затѣмъ дѣлимъ 6 тысячъ на 3, будетъ по 2 тысячи, ихъ такъ и пишемъ въ частномъ. Точно такимъ же образомъ 7 сот. : 3 = $2^1/_3$ сотни, 8 дес. : 3 = $2^2/_3$ дес. и наконецъ $9 : 3 = 3$. При этомъ всѣ цѣлые отвѣты сносятся въ частное, а дроби пока оставляются. Дроби эти приводятся къ нормальному виду слѣдующимъ путемъ. $^2/_3$ десятка тысячъ дадутъ 6 тысячъ и $^2/_3$ тысячи: эти $^2/_3$ тысячи составятъ $6^2/_3$ сотни, да у насъ еще $^1/_3$ сотни, всего получится 7 сотенъ, ихъ такъ и пишемъ. Останется только перевести $^2/_3$ десятка въ единицы, будетъ $6^2/_3$. Окончательный отвѣтъ составитъ $18929^2/_3$.

Въ иныхъ примѣрахъ можно разбивать дѣлимое на группы въ 2 разряда, и это представляетъ немалое удобство. Такъ, $^1/_4$ отъ

339765 Тиллихъ совѣтуетъ находить дѣленіемъ 33 дес. тысячъ на 4, 97 сотенъ на 4 и 65-ти единицъ на 4. Тогда форма вычисленія получится слѣдующая:

$$\begin{array}{lllll|l} \frac{1}{4} & 33 & 97 & 65 & & 8\underline{2}416 \\ & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \underline{2}5\underline{2}5 \\ & & & & & 84941 \end{array}$$

Повѣрка дѣйствій.

Въ чемъ состоитъ повѣрка дѣйствій, и чѣмъ она вызывается? Повѣрить дѣйствіе значитъ произвести такое дополнительное вычисленіе, которое вселило бы нѣкоторую увѣренность, что данный намъ примѣръ рѣшенъ правильно. Въ наши времена повѣрка примѣняется не очень часто, и даже начинающіе школьники на столько бываютъ увѣрены въ своихъ силахъ и въ своемъ умѣньи вычислять, что избѣгаютъ повѣрки.

Это съ одной стороны вредно, такъ какъ дѣти пріучаются съ малыхъ лѣтъ искать опоры не тамъ, гдѣ надо бы, т.-е. не въ своемъ искусствѣ и умѣньи, а на сторонѣ: они надоѣдаютъ учителю вопросами, „такъ ли?“ и постоянно засматриваютъ въ задачники: сходится ли съ отвѣтомъ?

Этимъ наша школа разслабляетъ дѣтей, вмѣсто того, чтобы помогать имъ становиться на ноги.

Старинная школа была счастливѣе въ выработкѣ характера и самымъ родомъ своихъ занятій закаляла его. Да и какъ было не закалять, когда, напр., въ средніе вѣка та самая работа требовала отъ дѣтей усиленныхъ трудовъ, которая теперь едва-едва оставляетъ въ нихъ впечатлѣніе. Въ средневѣковой школѣ какое-нибудь дѣленіе многозначныхъ чиселъ требовало массы времени, настойчивости, терпѣнія и т. п. Понятно, что затративши много труда и положивши не мало силъ, счетчику интересно было убѣдиться, хорошо ли онъ исполнилъ работу, и годится ли результатъ. Этимъ и вызывалась потребность повѣрки. Еще индусы, творцы ариѳметики, любили пользоваться повѣркой: впрочемъ, у нихъ была на то своя особенная, спеціальная причина, именно они, какъ ужъ упоминалось не разъ выше, вели всѣ вычисленія на пескѣ и стирали всѣ лишнія цифры по мѣрѣ того, какъ подходили къ концу, такъ что въ самомъ концѣ у нихъ оставались только данныя числа и отвѣтъ: вслѣдствіе этого имъ нельзя было просмотрѣть дѣйствіе еще разъ и убѣдиться, насколько вѣрно оно сдѣлано, поэтому имъ приходилось изобрѣтать особенные способы повѣрки, которыхъ они и предложили нѣсколько.

Самымъ употребительнымъ способомъ, не только у индусовъ, но и вообще во всей школѣ до XVIII-го вѣка была повѣрка числомъ 9. Она основана на слѣдующемъ. Если мы возьмемъ 2 слагаемыхъ, напр., 370 и 581, и раздѣлимъ каждое изъ нихъ на 9, затѣмъ сложимъ остатки отъ дѣленія, то эта сумма остатковъ будетъ такою же, какъ если бы мы прямо раздѣлили на 9 сумму данныхъ чиселъ.

Дѣйствительно, остатокъ отъ 370 : 9 будетъ 1, отъ 581 остатокъ будетъ 5 и отъ суммы данныхъ чиселъ, т.-е. отъ 951, остатокъ будетъ тоже $5 + 1 = 6$ (иногда, впрочемъ, изъ суммы остатковъ приходится выкидывать одну или нѣсколько девятокъ, напр., если бы слагаемыми были 375 и 581, то сумма остатковъ составила бы 11, а остатокъ суммы равнялся бы 2, т.-е. $11 - 9$). Эти числа 1, 5, 6 носятъ названіе повѣрочныхъ чиселъ, слѣд. 1 будетъ повѣрочнымъ числомъ для 370-ти, 5 для 581 и 6 для 951. Отсюда ясно вытекаетъ правило: повѣрочное число суммы равно суммѣ повѣрочныхъ чиселъ всѣхъ слагаемыхъ. Точно также при вычитаніи: повѣрочное число разности соотвѣтствуетъ разности повѣрочныхъ чиселъ уменьшаемаго и вычитаемаго; или иначе: повѣр. число уменьшаемаго равно суммѣ повѣрочныхъ чиселъ вычитаемаго и разности. При умноженіи правило такое: повѣр. число произведенія соотвѣтствуетъ произведенію повѣр. чиселъ множителей; и, наконецъ, при дѣленіи повѣр. число дѣлимаго соотвѣтствуетъ произведенію повѣрочныхъ чиселъ дѣлителя и частнаго.

За исключеніемъ сложенія, при каждомъ дѣйствіи имѣется 4 повѣрочныхъ числа, и они, обыкновенно, располагались такъ, что получалась фигура косого креста. Примѣръ: 525 раздѣлить на 15, получится въ частномъ 35. Тогда повѣрка представится слѣдующимъ

$$\text{крестомъ:}\quad \begin{array}{ccc} & 3 & \\ 6 & & 8 \\ & 3 & \end{array}$$

Нѣкоторые математики, приверженцы совершенной точности и полной безошибочности, находили, что повѣрка числомъ 9 далеко не безупречна и можетъ повести къ ошибкамъ. Зависѣть онѣ могутъ отъ такихъ причинъ. Во-первыхъ, различныя по величинѣ числа, но только отличающіяся другъ отъ друга на цѣлое число девятокъ, имѣютъ повѣрочныя числа одинаковыя; напр., числа 172 и 1081. Во-вторыхъ, этой повѣркой нельзя открыть пропуска нулей или же излишка нулей: числа 105, 1050, 15 даютъ одинаковыя повѣрочныя числа. Въ третьихъ, перестановка цифръ точно также не можетъ быть открыта этой повѣркой, такъ какъ, напр., числа 78932 и 87932 даютъ одинаковыя повѣрочныя числа. Итакъ, повѣрка числомъ 9 ненадежна. Поэтому, лучшіе авторы XVI—XVII в. рекомендуютъ еще повѣрку числомъ 7. Она основана на томъ же, на чемъ и предыдущая, и слѣд. при ней изъ данныхъ и искомыхъ чиселъ выкидываютъ возможное число семерокъ, а съ остатками поступаютъ точно такимъ же образомъ, какъ и при повѣркѣ числомъ 9. Въ этомъ случаѣ ужъ можно обнаружить и перестановку цифръ, и пропускъ нулей.

Казалось бы, что вполнѣ достаточно повѣрки числомъ 9 и числомъ 7 для того, чтобы можно было успокоиться и убѣдиться, что отвѣтъ вѣренъ. Но нѣтъ, Рудольфъ и Апіанъ (въ XVI ст.) объясняютъ, что повѣрять можно такимъ же путемъ, какъ и выше, еще съ помощью чиселъ 8, 4, 6.

Фишеръ (въ 1559 г.) провѣряетъ свои вычисленія числами 5, 6, 7, 8, 9, 11.

Но такое большое количество искусственныхъ повѣрокъ приводило многихъ авторовъ прямо къ отрицанію ихъ необходимости и пользы. Петръ Рамусъ, извѣстный французскій ученый и математикъ (ум. 1572 г.), говоритъ, что всѣ эти ухищренія излишни и ненужны, и что если кому требуется повѣрить дѣйствіе, то пусть онъ передѣлаетъ его снова и больше ничего; такъ будетъ лучше и въ томъ отношеніи, что, передѣлывая снова, мы можемъ не только открыть присутствіе ошибки, но и исправить ее.

Лука-де-Бурго смотритъ на дѣло хладнокровнѣе. Онъ не отрицаетъ совершенно провѣрки, но только совѣтуетъ дѣлать ее, по возможности, проще. Именно, онъ указываетъ для этого 2 способа. Во-первыхъ, можно то же дѣйствіе произвести еще разъ и только измѣнить его порядокъ, напр., при сложеніи нѣсколькихъ чиселъ, если мы сперва складывали сверху внизъ, то потомъ надо переложить снизу вверхъ. Во-вторыхъ, всякое дѣйствіе повѣряется своимъ обратнымъ: вычитаніе сложеніемъ, дѣленіе умноженіемъ и т. п.

Происхожденіе мѣръ.

Всѣ предыдущія объясненія, которыя изложены до настоящей главы, касались счета и вычисленій, т.-е. тѣхъ умственныхъ отправленій человѣка, которыя составляютъ наиболѣе характерную и общую черту его природы.

Дѣйствительно, потребность считать принадлежитъ всѣмъ людямъ и составляетъ необходимую часть ихъ мышленія. Поэтому естественно, что и проявленіе этой всеобщей потребности и присущей всѣмъ способности тоже носитъ въ себѣ много общаго и неизмѣннаго у всѣхъ народовъ и во всѣ времена. Въ счетѣ и вычисленіи нѣтъ мѣста произволу и очень мало мѣста для свободнаго выбора: все совершается по общему закону, предустановленному психической организаціею человѣка. Не то мы видимъ въ измѣреніи и особенно въ выборѣ мѣръ. Вотъ ужъ именно „что городъ, то норовъ, что деревня, то обычаи!“ Каждое маленькое государство, каждый хоть немножко самостоятельный народъ, каждый городъ, каждый уголокъ стремится измѣрять своими мѣрами, да и тѣ еще успѣваетъ перемѣнить нѣсколько разъ съ теченіемъ времени. Прослѣдимъ вкратцѣ эту измѣнчивость мѣръ и постараемся извлечь изъ нея тѣ немногія руководящія основанія, которымъ подчиняется выборъ мѣръ, а для этого возьмемъ отъ каждаго народа то, что болѣе всего примѣчательно.

Древній міръ признавалъ египтянъ творцами системы мѣръ. Еще въ доисторическія времена египтяне принимали 365 дней въ году; имъ же принадлежитъ введеніе високоснаго года въ 366 дней черезъ каждые 3 простыхъ, при чемъ установленіе это приписывается царю Канопу и относится къ 238 г. до Р. Х. Отъ египтянъ этотъ порядокъ былъ заимствованъ Юліемъ Цезаремъ и введенъ имъ во всемъ римскомъ государствѣ, онъ же держится и у насъ теперь подъ именемъ юліанскаго лѣтосчисленія. Счетъ по недѣлямъ и по мѣсяцамъ точно также былъ извѣстенъ египтянамъ.

Вавилоняне замѣчательны тѣмъ, что они стремились объединить всю систему мѣръ и привести ее къ одной основной единицѣ. Эта глубокая мысль занимала потомъ многихъ математиковъ, принадлежавшихъ къ различнымъ національностямъ, и нашла себѣ выраженіе только очень недавно, именно съ введеніемъ метрической системы мѣръ. Съ этой цѣлью вавилоняне пользовались особымъ священнымъ сосудомъ опредѣленныхъ размѣровъ, который они хранили въ надежномъ мѣстѣ. Длина ребра этого сосуда принималась за единицу длины. Когда же этотъ сосудъ наполнялся водой, то вѣсъ воды, вытекавшей изъ него въ опредѣленное время, принимался за единицу вѣса и назывался талантомъ; талантъ раздѣлялся на 60 минъ. Отъ вавилонянъ онъ перешелъ къ другимъ сосѣднимъ народамъ, напр., грекамъ, евреямъ, но при этомъ не всегда и не вездѣ онъ сохранялъ свою первоначальную величину. Обыкновенный греческій талантъ вѣсилъ слишкомъ $1^1/_2$ пуда и раздѣлялся на 6000 драхмъ.

Талантъ не особенно извѣстенъ, какъ мѣра вѣса, но зато онъ былъ очень распространенъ въ видѣ мѣры стоимости.

Это происходило потому, что въ древности монеты цѣнились по ихъ вѣсу, и когда совершалась купля-продажа, то, обыкновенно, условливались, сколько надо отвѣсить за такую-то вещь золота, серебра или даже мѣди. Такимъ образомъ талантъ золота, т.-е. приблизительно $1^1/_2$ пуда золота, цѣнился при царѣ Давидѣ въ 125 тысячъ рублей, въ переводѣ на наши монеты. Талантъ серебра при немъ же обошелся бы въ 2400 руб. Аттическій талантъ серебра цѣнился почти вдвое дешевле и доходилъ лишь до 1290 р. на наши деньги. Это случилось, вѣрнѣе всего, потому, что съ теченіемъ времени талантъ сталъ терять свое первоначальное значеніе вѣса и постепенно обращался въ монету, т.-е. съ нимъ получалось такое превращеніе: за талантъ принимался не кусокъ опредѣленнаго вѣса, а кусокъ съ клеймомъ „талантъ“, при чемъ вѣсу-то въ этомъ кускѣ было менѣе противъ должнаго, и слѣд. монета являлась неполноцѣнной.

Слѣдуетъ отмѣтить еще интересное совпаденіе, которое доказываетъ, что историческія вліянія простираются гораздо глубже, чѣмъ можно бы предполагать съ перваго раза. Заключается оно въ томъ, что есть связь между монетами современныхъ намъ англичанъ и монетами древнихъ вавилонянъ. Вавилоняне чеканили изъ мины чистаго золота 60 шекелей, а за 1 шекель давали 20 драхмъ серебряныхъ монетъ. Англійскій же фунтъ стерлинговъ (золотая монета, иначе наз. соверенъ) равенъ по вѣсу вавилонскому шекелю и содержитъ 20 шиллинговъ (шиллингъ—серебряная монета). Такимъ образомъ, видно полное соотвѣтствіе между фунтомъ стерлинговъ и шекелемъ, а также между драхмой и шиллингомъ.

Мѣрой длины у евреевъ и у многихъ народовъ не только древняго, но и новаго міра служилъ локоть. Ноевъ ковчегъ былъ длиною 300 локтей, шириною 50 и высотою 30 локтей. Локоть на наши мѣры составляетъ 21 дюймъ или 12 вершковъ. Впрочемъ, у другихъ народовъ онъ немного измѣнялся и колебался въ предѣлахъ отъ 18 до $22^1/_2$ дюймовъ. Размѣръ локтя опредѣлялся длиной локтевой кости отъ плеча до пальцевъ. Употребленіе его въ качествѣ мѣры длины подтверждаетъ намъ, что люди всегда искали мѣръ среди самой природы, которая одна только и можетъ указать намъ нѣчто незыблемое, постоянное и можетъ избавить насъ отъ произвола и неопредѣленности.

У римлянъ вмѣсто локтя употреблялся футъ — «pes», который представляетъ собой длину ступни взрослаго мужчины. И у германцевъ была въ употребленіи эта же самая мѣра, и слово «футъ» германскаго происхожденія и значитъ собственно «нога», т.-е. ступня. Подобнаго же происхожденія славянская мѣра «пядь». Это, собственно говоря, пространство между раздвинутыми мизинцемъ и большимъ пальцемъ, на наши мѣры будетъ около 4 вершковъ. Еще можно упомянуть о шагѣ римлянъ: римляне нерѣдко измѣряли разстояніе шагами (passus).

Римская мѣра фунтъ сохранила всю свою силу и примѣненіе до нашихъ дней. Это то, что мы теперь зовемъ аптекарскимъ фунтомъ, который равенъ $^7/_8$ обыкновеннаго русскаго фунта, или 84 золотникамъ. По образцу римскаго фунта употреблялись фунты въ Германіи, Австріи, Швеціи и т. д. Шведскій фунтъ на 15 граммовъ тяжелѣе русскаго, германскій на 90 граммовъ и австрійскій на 150, т.-е. почти на $^3/_8$ нашего фунта (граммъ — $^1/_4$ золотн.).

Аптекарскій фунтъ издавна дѣлился на 12 унцій и основаніемъ такого дѣленія служилъ, вѣроятно, примѣръ года, который тоже дѣлится на 12 равныхъ частей—мѣсяцевъ. Дѣленіе на унціи было чрезвычайно распространено въ древнемъ Римѣ и отчасти въ средніе вѣка.

Его примѣняли даже во многихъ такихъ случаяхъ, которые не имѣли ничего общаго ни съ вѣсомъ, ни съ фунтомъ. Напр., дробь $^1/_{12}$ у римлянъ большею частью называлась унціей, хотя бы то была $^1/_{12}$ листа бумаги или $^1/_{12}$ капитала, или $^1/_{12}$ времени—все это были унціи.

Еще два слова о мѣрахъ квадратныхъ. Вычисленіе площади прямоугольника не всегда было такимъ легкимъ дѣломъ, какимъ оно представляется намъ теперь. По-крайней мѣрѣ, извѣстна арабская задача X-го вѣка со слѣдующимъ оригинальнымъ содержаніемъ: судья разбираетъ споръ, можно ли участокъ въ 100 локтей длины и 100 локтей ширины замѣнить 2 участками въ 50 локтей длины и 50 локтей ширины. Судья склоняется къ тому, что такая замѣна возможна. Очевидно, ему не подъ силу было догадаться, что первый участокъ содержитъ 4 вторыхъ, а не два.

Метрическая система мѣръ.

На послѣднюю четверть XVIII столѣтія приходится самая важная реформа въ области мѣръ — введеніе одной основной метрической единицы.

Мѣры времени у всѣхъ народовъ земли приблизительно одинаковы, потому что онѣ зависятъ отъ тѣхъ размѣровъ, которые предустановлены самой природой. Но остальныя всѣ мѣры чрезвычайно разнообразны и произвольны. Германія, раздробленная до послѣдняго времени (1870 г.) на многое множество отдѣльныхъ мелкихъ государствъ и въ то же время достигшая высокой степени гражданскаго развитія, служила нагляднымъ образцомъ обилія мѣръ. Въ каждомъ княжествѣ и въ каждомъ порядочномъ городѣ былъ свой локоть или свой футъ: мѣры вмѣстимости при одномъ названіи иногда имѣли разный объемъ: центнеръ (употребительная мѣра вѣса, 6 пуд. съ лишкомъ), давалъ, смотря по мѣсту, разницу фунтовъ въ 20. Въ Швейцаріи каждый кантонъ чеканилъ свою монету и устанавливалъ мѣры и вѣсъ.

Во Франціи во 2-ю половину XVIII-го вѣка примѣнялось свыше 50-ти различныхъ мѣръ вѣса, вмѣстимости и длины. Все это разнообразіе чрезвычайно губительно дѣйствовало и на внутреннюю, и на внѣшнюю торговлю государствъ.

Купцамъ приходилось имѣть дѣло съ тысячами различныхъ цѣнъ и мѣръ. Приводя къ извѣстнымъ мѣрамъ, они часто должны были вычислять только приблизительно, а не вполнѣ точно, потому что и самыя отношенія мѣръ подвергались колебаніямъ. Кромѣ того, нормальныхъ образцовъ и мѣръ, по которымъ можно было бы провѣрять и съ которыми сравнивать, обыкновенно, нигдѣ не хранилось и разрѣшить сомнѣнія и споръ было не почему. Кстати, и въ учебникахъ допускались относительно мѣръ неточности и даже ошибки. По всѣмъ этимъ основаніямъ вполнѣ понятно стремленіе ученыхъ математиковъ, коммерсантовъ и вообще всѣхъ людей, такъ или иначе прикасавшихся къ купдѣ и продажѣ, объединить мѣры и дать имъ твердые устои, заимствовавши образцы изъ самой природы.

Въ средніе вѣка нѣкоторые государи и городскія управленія пытались установить опредѣленныя закономъ величины мѣръ. Въ городской ратушѣ въ Регенсбургѣ хранились металлическіе образцы мѣръ: футъ, шестифутовая сажень и локоть: всякій желающій могъ осматривать эти образцы и сравнивать съ ними свои мѣры. Многократно издавались въ различныхъ государствахъ предписанія, чтобы мѣры вмѣстимости и длины приготовлялись «съ запасомъ», т.-е. съ нѣкоторымъ прибавкомъ къ своей величинѣ, очевидно, во избѣжаніе злоупотребленій со стороны купцовъ.

Франція первая привела въ исполненіе мысль о твердо установленной мѣрѣ. Прежде всего ученые задались вопросомъ: что именно принять за единицу мѣры? Какую величину взять для этого изъ природы? Предлагали взять длину секунднаго маятника, т.-е. такого, который совершаетъ свое качаніе ровно въ секунду, но оказалось, что эта длина имѣетъ нѣкоторыя неудобства, такъ какъ секундный маятникъ измѣняется съ географической широтой мѣстности. Другіе предлагали величину ячейки пчелиныхъ сотъ, разстояніе между зрачками взрослаго человѣка, видимый діаметръ солнца. Въ 1789 г. французское національное собраніе энергично взялось за реформу. Въ засѣданіи 8 мая 1790 г., по предложенію извѣстнаго аббата Таллейрана, было рѣшено выработать, совмѣстно съ Англіей, такую систему, которая годилась бы для всѣхъ народовъ земного шара.

Для этого организована была коммиссія изъ французовъ и англичанъ.

Однако, вскорѣ англичане разошлись съ французами изъ-за политическихъ недоразумѣній и установили у себя свою систему, въ которой единицей былъ принятъ ярдъ, заимствованный отъ длины секунднаго маятника въ Гринвичѣ: ярдъ = 3 футамъ = 0,91439 метра. Франція такимъ образомъ осталась одна и принялась за работу. Комиссія рѣшила принять за основаніе одну десятимилліонную часть четверти парижскаго меридіана или, иначе сказать, сорокамилліонную долю окружности земного шара. Для этого потребовалось новое измѣреніе меридіана. Работа нѣсколько затянулась и едва къ 1799 году была закончена подъ руководствомъ знаменитаго математика Лапласа: при этомъ фактически было измѣрено 10 градусовъ меридіана, на разстояніи между городами *Барселоной* и *Дюнкирхеномъ*. Когда всѣ работы окончились, то приготовлено было 2 нормальныхъ платиновыхъ образца, совершенно равныхъ другъ другу, и имъ было дано названіе «метръ» отъ греческаго слова μετρον, что значитъ мѣра. Въ этомъ случаѣ съ особенной цѣлью было выбрано слово греческое, а не французское, т.-е. слово языка отжившаго, международнаго, чтобы не обидѣть самолюбія всѣхъ тѣхъ государствъ, которыя пожелали бы ввести у себя метръ. Чтобы образовать доли метра, а также чтобы получить кратныя метра, воспользовались исключительно *десятичной системой* и раздѣлили метръ на 10 равныхъ частей, назвали дециметромъ, раздѣлили на 100, назвали центиметромъ, на 1000 — миллиметромъ; точно также декаметръ составляетъ 10 метровъ, гектометръ—100, километръ 1000 и миріаметръ – 10000.

При этомъ десятичная система была выбрана потому, что на ней основана вся наша нумерація, и она даетъ наибольшія выгоды для разсчетовъ. Латинскія слова: деци, центи, милли и греческія: дека, гекто, кило, миріа, которыя обозначаютъ соотвѣтственно: 10, 100, 1000, 10000 были выбраны опять-таки потому, что этимъ путемъ ничей патріотизмъ не затрагивается, и система можетъ быть признана вполнѣ международной. Отъ мѣръ длины легко было произвести мѣры поверхностей, вмѣстимости, вѣса и кубическія. Такъ, площадь квадрата съ десятиметровой стороной принята была за единицу подъ именемъ ара, отъ латинскаго слова «area», что значитъ поверхность. Единицей объемовъ былъ взятъ кубическій метръ, который сталъ называться стеромъ, когда примѣнялся, напр., къ измѣренію объема угля дровъ, и т. п. Греческое слово «стеръ» и значитъ «объемъ», отъ него, между прочимъ, производится и слово «стереометрія», т.-е. измѣреніе объемовъ тѣлъ. Для объемовъ жидкостей стала употребляться болѣе мелкая мѣра—литръ, составляющій 1 кубическій дециметръ. Единицей вѣса былъ принятъ граммъ, равный вѣсу кубическаго сантиметра чистой воды, взятой при температурѣ 4° Цельсія. Слово «граммъ» — греческаго корня и означаетъ, собственно говоря, гравировку или штемпель, который долженъ класться на гирькѣ, а уже отсюда и самый вѣсъ: въ буквальномъ переводѣ слово граммъ значитъ «написанное», и поэтому оно стоитъ въ связи со словами грамматика, грамота.

Метрическая система отличается простотой, потому что у ней только одинъ исходный пунктъ—метръ, и всѣ остальныя мѣры вытекають изъ него: это составляетъ большое упрощеніе, такъ какъ при помощи 12 словъ составляются названія для всѣхъ рѣшительно единицъ этой системы, которыя обнимаютъ собою всѣ ея отдѣлы и не даютъ повода къ смѣшенію съ какими бы то ни было другими старинными мѣрами. 1 января 1872 г. метрическая система была введена въ Германіи. Нѣсколько ранѣе этого ее приняла Италія и Швейцарія. По закону 9 іюля 1873 г. всѣ мѣстныя мѣры различныхъ уголковъ Германіи были отмѣнены и объявлены недѣйствительными.

Къ большому сожалѣнію, оказывается, что измѣрить длину меридіана совершенно точно чрезвычайно трудная задача; Лапласу и его сотрудникамъ не удалось избѣжать нѣкоторой, хотя и небольшой, ошибки, а потому нормальный метръ, образецъ котораго сохраняется въ Парижѣ, не равенъ въ точности одной сорокамилліонной долѣ истинной длины меридіана. Именно, по новѣйшимъ изслѣдованіямъ и измѣреніямъ оказывается, что принятый во всемъ свѣтѣ метръ короче того, какой бы слѣдовало имѣть, на $^1/_{10}$ миллиметра. Точно также, когда метрическія мѣры вводились въ Пруссіи, то нормальный образецъ, изготовленный въ Берлинѣ, когда его сличили съ парижскимъ, оказался неравнымъ ему, правда, на микроскопическую долю: прусскій метръ = 1,00000301 метра французскаго.

Русскія мѣры.

Мѣры времени. Мы начинаемъ съ нихъ потому, что въ нихъ всѣ народы болѣе согласны, чѣмъ въ какихъ бы то ни было другихъ. Вездѣ принятъ солнечный годъ, содержащій 12 мѣсяцевъ или 365¼ сутокъ, и только въ очень немногихъ странахъ (напр. въ Турціи) пользуются луннымъ годомъ, продолжительностью въ 354 дня 8 час. 45 м. 5 с. Поэтому представляется вполнѣ естественнымъ, что уже въ ариѳметикѣ Леонтія Магницкаго мѣры времени совершенно тѣ же, что и у насъ:

годъ имѣетъ 12 мѣсяцевъ,
мѣсяцъ имѣетъ 4 седмицы,
седмица имѣетъ 7 дней,
день имѣетъ 24 часа,
часъ имѣетъ 60 минутъ,
а весь годъ имѣетъ 365¼ дней.

О минутахъ и секундахъ здѣсь вовсе ничего не сказано. Зато предъ Магницкимъ существовали оригинальныя дѣленія часа:

Большой часъ имѣетъ 5 первыхъ дробныхъ часовъ,
1-й дробный часъ—5 другихъ дробныхъ часовъ,
другой дробный часъ—5 третьихъ дробныхъ часовъ,
и т. д. до 6-го,
шестой дробный часъ—5 часовъ седьмыхъ малыхъ дробныхъ.

«Боле же сего не бываетъ, т.-е. не рождаются отъ седьмыхъ дробныхъ». Не сказано здѣсь ничего и о вѣкѣ, а вотъ у Кирика, новгородскаго діакона, жившаго въ XII-мъ столѣтіи, вѣкъ принимается за 1000 лѣтъ, вмѣсто нашихъ ста.

Мѣры длины. Футъ никогда не признавался исконной русской мѣрой: онъ введенъ въ Россію уже при Петрѣ Великомъ и вывезенъ имъ изъ Англіи, не даромъ и сейчасъ онъ иногда называется для точности англійскимъ футомъ и въ немъ содержится 12 англійскихъ дюймовъ. Старинная русская мѣра—аршинъ, состоящій изъ 4 четвертей. Онъ, подобно локтю и футу, заимствованъ, вѣроятнѣе всего, изъ природы, по крайней мѣрѣ, его четвертая доля—«четверть»—равна разстоянію между раздвинутыми большимъ и указательнымъ пальцемъ взрослаго человѣка.

Въ русскихъ сборникахъ XVII в., кромѣ извѣстныхъ намъ сажени, аршина и вершковъ, упоминается еще локоть, и опредѣленъ онъ такъ, что 2 аршина равны 3 локтямъ, слѣд., локоть выходитъ длиною въ $10^2/_3$ вершка.

Земельныя мѣры. Въ Московской Руси было 3 главныхъ земельныхъ мѣры: соха, четверть и десятина. Соха, подобно многимъ другимъ мѣрамъ того времени, не отличалась постоянствомъ и зависѣла отъ качества земли и отъ принадлежности ея тому или другому владѣльцу. Соха хорошей («доброй») земли составлялась изъ 800 четвертей, средней—изъ 1000 и худой изъ 1200. Она дѣлилась на доли, при чемъ названія долямъ бывали иногда черезчуръ длинныя, такъ напр. $\frac{1}{24}$ выражалась такъ: «пол-пол-пол-треть сохи».

Другая земельная мѣра—четверть. Чему, примѣрно, она равна на наши мѣры,—трудно сказать: одни утверждаютъ, что пол-десятинѣ, другіе увеличиваютъ ея размѣръ до полутора десятинъ. Дѣленія четверти простирались до мельчайшихъ долей, такъ что въ расчеты вводилась $\frac{1}{3072}$ доля подъ именемъ «пол-пол-пол-пол-пол-пол-пол-пол-пол-пол-третникъ». Вѣроятно, подъ четвертью разумѣлось встарину такое количество земли, на которое приходилось высѣвать четверть зернового хлѣба. Подобно этому осьмина земли соотвѣтствовала осьминѣ хлѣба.

Наконецъ, третья земельная мѣра—десятина. Она и въ настоящее время очень употребительна. Различаютъ десятину казенную въ 2400 кв. саж. и хозяйственную въ 3200 кв. саж. Каково происхожденіе десятины и что она обозначала въ своей первоначальной формѣ? Слово «десятина» звучитъ слишкомъ знакомо для насъ и имѣетъ очевидную связь со словомъ «десять» или вѣрнѣе съ выраженіемъ «десятая часть». Владиславлевъ въ статьѣ «Происхожденіе десятины, какъ земельной мѣры» («Ж. М. Н. П.», 1895, II) объясняетъ происхожденіе десятины слѣдующимъ образомъ. Въ старину крестьяне брали землю у помѣщиковъ и нерѣдко пользовались ею съ такимъ условіемъ, чтобы обрабатывать въ пользу владѣльца извѣстную долю того участка, который они арендуютъ. Обыкновенно этой долей служила десятая часть—десятина. Предположимъ теперь, что земельный участокъ, необходимый для прокормленія одной семьи, отличался постоянствомъ, т.-е. былъ приблизительно одинаковъ въ разныхъ мѣстностяхъ, тогда, значитъ, и десятая доля его, десятина, получаетъ довольно опредѣленное значеніе и начинаетъ играть роль земельной мѣры. Вотъ какъ объясняетъ это дѣло Владиславлевъ, приводя въ доказательство писцовыя книги, изданныя географическимъ обществомъ.

Бобынинъ держится другой точки зрѣнія. Возьмемъ, говоритъ онъ, такой квадратъ, чтобы сторона его содержала десятую часть версты, т.-е. 50 саженъ, тогда площадь такого квадрата будетъ имѣть 2500 кв. саж.; остается теперь только допустить, что съ теченіемъ времени эта площадь нѣсколько уменьшилась и обратилась въ 2400 кв. саж., въ такомъ случаѣ ясно будетъ, что такое десятина: это квадратная площадь, со стороною, равною десятой части версты.

Кромѣ перечисленныхъ нами трехъ мѣръ были въ употребленіи еще такія: a) Выть, это 5 — 10 десятинъ крестьянской пашни. b) Новгородская соха, или сошка, въ 10 разъ меньше московской; въ сохѣ 3 обжи, въ обжѣ 5 коробьевъ. Особыя земельныя мѣры существовали, повидимому, въ Тверскомъ княжествѣ. Въ монгольскій періодъ въ юго-западной Россіи были земельныя мѣры: уволока, моргъ и прутъ; въ уволокѣ 30 морговъ, въ моргѣ 30 прутовъ. Моргъ на наши мѣры составляетъ приблизительно пол-десятины. (Всѣ эти свѣдѣнія заимствованы изъ сочиненія Бобынина «Состояніе физико-матем. знаній въ Россіи въ XVII в.»).

Мѣры вмѣстимости. Въ старину онѣ представляли гораздо болѣе сложную таблицу, чѣмъ теперь. Вотъ что встрѣчаемъ въ XVII ст.

Оковъ—4 чети,
четвертокъ — 2 чети,
четь — 2 мѣры или 2 осмины,
осмина — 2 полуосмины,
мѣра — 2 полумѣры,
полмѣры — 2 четверика,
четверикъ — 2 получетверика.

Изъ этого видно, что четверть являлась четвертой долей окова а четверикъ четвертой долей мѣры, при чемъ послѣдняя считалась осьминой, т.-е. восьмой частью окова.

Мѣры вѣса. Въ XVII и XVIII ст. встрѣчаются большею частью знакомые намъ берковецъ, пудъ, фунтъ. Но на ряду съ ними перечисляется цѣлая масса иностранныхъ мѣръ, и старинныхъ, и современныхъ. Знаніе ихъ было очень необходимо тогдашнему торговому человѣку, потому что всѣ обороты шли чрезъ «иноземныхъ гостей»: голландцевъ, англичанъ, венгровъ и т. д. У Магницкаго приведены мѣры латинскія (ассъ, унція и ихъ доли), греческія (талантъ, мина, драхма и др.), польскія, прусскія, литовскія, краковскія, голландскія и много другихъ: перечисленіе ихъ занимаетъ нѣсколько страницъ въ ариѳметикѣ, а для ясности приложены сравнительныя таблицы, довольно длинныя.

Мѣры стоимости. Уже ко времени Ярослава Мудраго существовала на Руси монета «гривна». Въ ней было 20 ногатъ, или 50 рѣзанъ. Различаются гривны кунныя, серебряныя и золотыя: изъ нихъ кунныя готовились изъ низкопробнаго серебра и стоили вчетверо дешевле настоящихъ серебряныхъ; предполагаютъ, что изъ серебряной *гривны образовался въ Новгородѣ къ XV вѣку рубль;* золотая гривна въ $12^1/_2$ разъ дороже серебряной и вѣсила около 20 золотниковъ. Съ петровскихъ временъ стали чеканиться монеты «гривенники».

Рубль получилъ свое названіе отъ слова «рубить» и представлялъ собой отрубленный кусокъ серебра вѣсомъ около полуфунта. Онъ принадлежалъ, главнымъ образомъ, къ новгородскимъ монетамъ, но попадались и московскіе рубли, которые были вдвое меньше новгородскихъ. Въ рублѣ содержалось 10 гривенъ, или, вѣрнѣе, гривенниковъ. Гривенникъ равнялся 10-ти новгородкамъ, т.-е. новгородскимъ мелкимъ серебрянымъ (XV в.) монетамъ, или 10 копейкамъ, т.-е. московскимъ монетамъ. Происхожденіе слова «копейка» объясняется такъ. Это была небольшая серебряная монета, на которой изображался великій князь — верхомъ на конѣ: въ рукахъ онъ держалъ копье, а такъ какъ монетка была невелика, то и копье было очень маленькое, и прозвали его копейкомъ, и отсюда получилось названіе самой монеты—копейка. По крайней мѣрѣ, во временникѣ (лѣтописи) XVI в. прямо говорится: «оттолѣ прозвана деньги копейныя». Серебряныя копейки вѣсили около 10 долей. При Алексѣѣ Михайловичѣ стали чеканить мѣдныя копейки.

Алтынъ—татарскаго происхожденія: «алты» по-татарски значитъ шесть; алтынъ содержалъ 6 денегъ, т.-е. 6 полукопеекъ. При Петрѣ Великомъ чеканились серебряные алтыны.

Деньга равнялась половинѣ копейки. До XVI вѣка она чеканилась изъ серебра, а потомъ ее стали готовить изъ мѣди. Съ 1829 г. переименовали ее въ денежку. Ея нельзя смѣшивать съ полушкой, иначе сказать, съ полуденьгой, которая равна $^1/_4$ копейки. Это была уже самая мелкая монета на Руси. Впрочемъ, Карамзинъ приводитъ еще другія доли: въ *полушкѣ* 2 *попуполушки*, въ *полуполушкѣ* 2 пирога, въ пирогѣ 2 полупирога, въ полупирогѣ 2 четверти пирога.

Обыкновенныя (простыя) дроби.

Необходимость дробей должна чувствоваться всякимъ человѣкомъ, который желаетъ хоть немного выйти за предѣлы начальныхъ вычисленій. И въ практической жизни, и при первыхъ же шагахъ науки дроби совершенно необходимы, и безъ нихъ обойтись нельзя. Поэтому и въ самыхъ древнихъ и въ самыхъ короткихъ ариѳметическихъ рукописяхъ встрѣчаются непремѣнно замѣтки о доляхъ.

Прежде всего наталкиваетъ на необходимость дробей дѣленіе съ остаткомъ. Интересны попытки, которыя дѣлались старинными авторами для того, чтобы какъ-нибудь обойтись безъ дробей и провести все дѣло легко и спокойно, т.-е въ цѣлыхъ числахъ. Такъ, въ арабской рукописи 12-го вѣка по Р. Х. рѣшается вопросъ «раздѣлить 100 фунтовъ между 11-ю человѣками поровну»; какъ видно, здѣсь получается остатокъ—1 фунтъ, его предлагаютъ промѣнять на яйца, которыхъ по существующимъ цѣнамъ придется 91 штука; тогда на каждаго человѣка можно дать по 8 яицъ и еще 3 яйца въ остаткѣ: что дѣлать съ ними? ихъ авторъ рекомендуетъ отдать тому, кто дѣлилъ, за его труды или же промѣнять на соль къ яйцамъ. Еще проще поступаетъ представитель римской монастырской учености IX вѣка Одо Клюнійскій. Требуется ему раздѣлить 1001 фунтъ на 100. Остатокъ 1 онъ дробитъ въ унціи, драхмы и т. д. до тѣхъ поръ, пока только можно дробить. И такъ какъ въ концѣ концовъ еще получается маленькій остатокъ, то его Одо предлагаетъ совсѣмъ бросить и не брать въ счетъ. Но при этомъ вѣдь происходитъ ошибка, хотя и небольшая, и автору ничего иного не остается, какъ извинить свою ошибку несовершенствомъ всего земного и всѣхъ людскихъ дѣяній и для большей убѣдительности привести даже латинскіе стихи:

Rérum véro paréns qui sólus cúncta tuétur	Отецъ вселенной,—который все содержитъ,
Cúm sit cúncti poténs, perféctus solus habétur	Одинъ владѣетъ всѣмъ, одинъ безъ недостатковъ.

Изъ нихъ авторитетно вытекаетъ, что только небесное свободно отъ ошибокъ и обладаетъ совершенствомъ.

Понятна та осторожность и та боязнь, съ которой въ старину относились къ дробямъ. Это былъ труднѣйшій и запутаннѣйшій отдѣлъ ариѳметики. Не даромъ и сейчасъ у нѣмцевъ сохранилась поговорка «попасть въ дроби» (in die Brüche gerathen), что совершенно равносильно нашему «стать въ тупикъ», т.-е. зайти въ такой проулокъ, выходъ изъ котораго застроенъ. Трудность увеличивалась и осложнялась, главнымъ образомъ, тѣмъ, что не принято было давать никакихъ объясненій, и вся старательность ученика направлялась на заучиваніе правилъ, безъ всякаго пониманія того, откуда эти правила вытекаютъ. Кстати, и самая глава о дробяхъ была мало разработана и представлялась неясной даже для составителей учебниковъ, потому что дроби то смѣшивались съ именованными числами, то принимались состоящими изъ 2 чиселъ числителя и знаменателя. Въ понятіяхъ о дѣйствіяхъ надъ дробями была большая путаница, особенно, что касалось умноженія и дѣленія, да и сейчасъ въ наши дни этотъ туманъ не разсѣялся; напр., первые 2—3 года, пока ребенокъ учитъ цѣлыя числа, ему толкуютъ, что умножить, значитъ увеличить въ нѣсколько разъ, а потомъ, когда онъ перейдетъ къ дробямъ, его начинаютъ убѣждать, что умножить вовсе не значитъ увеличить. Между тѣмъ, какъ легко было бы устранить все это, если бы взглянуть на дѣло попроще и согласиться, что умножить въ цѣлыхъ числахъ значитъ взять слагаемымъ нѣсколько разъ, а въ дробяхъ—взять долю числа. Трудны были дроби прежде, нелегки онѣ и теперь, а такъ какъ изученіе ихъ очень полезно и необходимо, то преподаватели старались и въ прозѣ, и въ стихахъ ободрить своихъ учениковъ и побудить ихъ пересилить трудности. Знаменитый римскій ораторъ Цицеронъ (въ 1 ст. до Р. Х.) счелъ долгомъ сказать свое авторитетное слово по этому случаю «sine fractionibus arithmetices peritus nemo esse potest»: это значитъ «безъ знанія дробей никто не можетъ признаться свѣдущимъ въ ариѳметикѣ». То же самое встрѣчаемъ у нашего Магницкаго въ такихъ стихахъ:

Но нѣсть той ариѳметикъ,
Иже въ цѣлыхъ отвѣтникъ,
А въ доляхъ сый ничтоже.

Отвѣщати возможе
Тѣмже о ты радѣяй,
Буди въ частяхъ умѣяй.

Особенное уваженіе къ дробямъ свидѣтельствуетъ авторъ одной славянской рукописи XVII в. Именно, разсуждая о тройномъ правилѣ, онъ говоритъ: «Нѣсть се дивно что тройная статія въ цѣлыхъ, но есть похвально, что въ доляхъ».

Разсмотримъ теперь подробно, какъ развивалось ученіе о дробяхъ у различныхъ народовъ.

Древніе египтяне задались въ этомъ отношеніи чрезвычайно оригинальной мыслью. Они пользовались только такими дробями, у которыхъ числитель непремѣнно единица; всѣ остальныя дроби они считали неудобными для вычисленія и старались замѣнять ихъ этими основными дробями, т.-е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, такъ что когда египтянину требовалось произвести какое-нибудь дѣйствіе надъ дробями, то онъ сперва замѣнялъ данныя дроби основными, затѣмъ дѣлалъ вычисленіе и уже въ концѣ-концовъ изъ ряда основныхъ дробей выводилъ одинъ общій отвѣтъ. Всѣ замѣны, которыя требовалось при этомъ дѣлать, совершались при помощи обширныхъ таблицъ, спеціально заготовленныхъ на этотъ случай. Вотъ какъ начинаются эти таблицы:

$$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}\;\frac{1}{15}$$
$$\frac{2}{7}=\frac{1}{4}\;\frac{1}{28}$$
$$\frac{2}{9}=\frac{1}{6}\;\frac{1}{18}$$
$$\frac{2}{11}=\frac{1}{6}\;\frac{1}{66}$$
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}\;\frac{1}{52}\;\frac{1}{104}$$

и т. д. до $\frac{2}{99}=\frac{1}{66}\;\frac{1}{198}$

Здѣсь между долями подразумѣвается, очевидно, сложеніе, такъ что $\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$. Съ дробями, у которыхъ числитель больше двухъ, приходилось немало хлопотать, и составителямъ таблицъ досталось немало труда, напр., надъ разложенiемъ дроби $\frac{7}{29}$. Ходъ вычисленiя такой:

$$\frac{7}{29}=\frac{1}{29}+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}\right)+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}\right)=\frac{1}{29}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}+\left(\frac{2}{24}+\frac{2}{58}+\frac{2}{174}+\frac{2}{232}\right)=$$
$$\frac{1}{29}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}+\frac{1}{12}+\frac{1}{29}+\frac{1}{87}+\frac{1}{116}=\frac{2}{29}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}$$
$$\frac{1}{12}+\frac{1}{87}+\frac{1}{116}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{232}+\frac{1}{12}+\frac{1}{87}+\frac{1}{116}=\frac{1}{6}$$
$$\frac{1}{29}+\frac{2}{87}+\frac{1}{58}=\frac{1}{58}+\frac{1}{174}+\frac{1}{6}+\frac{1}{29}+\frac{1}{58}=\frac{2}{29}+\frac{1}{174}+\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}$$
$$\frac{1}{174}+\frac{1}{232}+\frac{1}{174}+\frac{1}{6}=\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}+\frac{1}{6}=\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{58}+\frac{1}{87}+\frac{1}{232}.$$

При помощи такихъ таблицъ египтяне умѣли обходиться безъ приведенiя дробей къ одному знаменателю; для этого они переводили слагаемыя въ основныя дроби на основанiи таблицъ, соединяли всѣ эти основныя дроби въ одну массу и потомъ смотрѣли, опять же руководствуясь таблицами, какой одной дроби равняется вся эта масса. Какъ составлялись подобныя таблицы? Точнаго отвѣта дать сейчасъ нельзя, тѣмъ болѣе, что онѣ заимствованы изъ папируса Ринда, а этотъ папирусъ относится ко времени за 2000 лѣтъ до Р. Х. Можно догадываться, что едва ли всѣ строки принадлежатъ одному составителю, вѣрнѣе всего отдѣльные результаты тщательно собирались въ общiй сводъ, такъ что на нѣкоторые отвѣты приходилось наталкиваться случайно, при какихъ-нибудь другихъ вычисленiяхъ.

Такъ какъ египтяне пользовались только основными дробями, т.-е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, то они, обыкновенно, вовсе и не писали числителя, а только подразумѣвали его, писали же одного знаменателя; но чтобы не смѣшать дробь съ цѣлымъ числомъ, они надъ цифрами знаменателя ставили точку. Изъ производныхъ же дробей разсматривалась только $\frac{2}{3}$, у которой былъ свой знакъ, такъ что эта дробь принималась за какую-то особенную величину, не стоящую въ прямой связи ни съ цѣлыми числами, ни съ дробями.

Арабы, очевидно, подъ вліяніемъ египтянъ, раздѣляли дроби на «выговариваемыя» и «невыговариваемыя». Такіе термины встрѣчаются, напр., въ VIII—IX в. по Р. X. Выговариваемыми дробями были тѣ, у которыхъ числитель единица, а знаменатель отъ 2 до 9; для нихъ есть особенныя названія, въ родѣ нашихъ «половина», «треть» и т. д. Невыговариваемыми дробями были всѣ остальныя, и, напр., $\frac{1}{13}$ выражалась описательно такъ: одна изъ тринадцати долей; $\frac{1}{30}$ такъ: шестая часть одной пятой. Древніе греки часто вводили въ вычисленія дроби. Обозначали они ихъ такъ: сперва писали числителя и сверху справа ставили значокъ въ родѣ запятой, потомъ дважды повторяли знаменателя и приписывали каждый разъ значокъ въ видѣ 2-хъ запятыхъ. Напр., $\frac{3}{21} = \gamma' \; K\alpha'' \; K\alpha''$, такъ какъ у грековъ γ обозначаетъ 3, α единицу, K двадцать. Однако чаще всего греки, по примѣру египтянъ и арабовъ, пользовались основными долями и при этомъ обыкновенно пропускали числителя, а знаменателя писали съ присоединеніемъ 2 черточекъ, и выходило, напр., что $\frac{1}{21} = K\alpha''$. Если нѣсколько основныхъ дробей писалось подъ рядъ, то это значило, что ихъ надо сложить. Особенные знаки были для половины: σ (старинная греческая буква сигма) и для 2 третей: ω.

Индусы, въ лицѣ одной изъ древнѣйшихъ своихъ отраслей — доисторическаго племени Тамуловъ, выражали всѣ доли при помощи только $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_{16}$, $^1/_{40}$, $^1/_{80}$, $^1/_{960}$, для которыхъ у нихъ были особенныя названія и знаки. Всѣ другія дроби они старались привести къ шести указаннымъ, и это имъ въ большинствѣ случаевъ удавалось порядочно, такъ какъ комбинаціи этихъ долей даютъ почти цѣлую единицу.

У индусскаго математика Брамагупты (въ XI в. по Р. X.) имѣется довольно развитая система простыхъ дробей. У него встрѣчаются различныя дроби, и простыя и производныя, т.-е. съ числителемъ и 1 и любое число. Числитель и знаменатель пишутся такъ же, какъ у насъ, но только безъ горизонтальной черты, а просто ставятся одинъ подъ другимъ. Выше числителя помѣщается цѣлое число, если оно есть. И выходитъ по индусскому порядку $\begin{matrix}5\\7\\8\end{matrix}$, а по нашему—$5^7{}_8$.

Представители позднѣйшей арабской учености (XI в.) копируютъ индусскій порядокъ Если цѣлыхъ нѣтъ, то они вверху помѣщаютъ нуль. Вотъ изображеніе $\frac{1}{11}$ восточно-арабскими цифрами $\frac{\text{i}}{\text{II}}$: отсюда видно, что нуль у восточныхъ арабовъ писался въ видѣ точки. Итальянецъ Леонардо Фибоначчи, слѣдуя манерѣ восточныхъ народовъ (семитовъ) писать справа налѣво, помѣщаетъ, въ случаѣ смѣшанныхъ чиселъ, справа цѣлое число, а лѣвѣе дробь, но читаетъ написанное общепринятымъ европейскимъ порядкомъ, т.-е. сперва цѣлое число, а потомъ уже дробь.

Своеобразную систему дробей наблюдаемъ мы у римлянъ. Народъ серьезный, практичный, дѣловой, они предпочитали отвлеченному мышленію наглядность, и поэтому ничего нѣтъ естественнѣе въ ихъ положеніи, какъ замѣнить отвлеченныя доли подраздѣленіями употребительныхъ мѣръ. Они остановили свое вниманіе на мѣрѣ вѣса—фунтъ (ассъ, въ настоящее время аптекарскій фунтъ). Ассъ дѣлится на 12 частей—унцій. Изъ нихъ образуются всѣ дроби со знаменателемъ 12, т.-е. $\frac{1}{12}, \frac{2}{12}, \frac{3}{12}, \frac{4}{12}, \frac{5}{12}, \frac{6}{12}, \frac{7}{12}, \frac{8}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12}, \frac{11}{12}$; при этомъ каждая изъ такихъ дробей выражается особеннымъ знакомъ и особеннымъ словомъ; любую дробную величину можно было выражать посредствомъ унцій, напр., вмѣсто того, чтобы сказать: «я прочиталъ $\frac{5}{12}$ книги», говорили «я прочиталъ 5 унцій книги». Такимъ образомъ, фунтъ являлся и именованной единицей, и въ то же время отвлеченной, такъ какъ его долями выражались всевозможныя дроби.

Эта римская система дробей держалась въ школахъ Западной Европы вплоть до тѣхъ поръ, когда принесенная чрезъ Испанію арабская—вѣрнѣе сказать, индусская—ариѳметика стала вступать въ свои права и получила силу и перевѣсъ. Это относится къ XV—XVI вѣк. по Р. X. Въ эти вѣка ученіе о дробяхъ уже получаетъ настояшій обликъ, знакомый намъ теперь, и формируется приблизительно въ тѣ же самые отдѣлы, которые встрѣчаются въ нашихъ настоящихъ учебникахъ. *Но все это было еще очень мудрено, туманно и трудно* для начинающихъ учиться. О происхожденіи дробей тогда не говорили или же говорили очень мало и съ пропусками. Вмѣсто того прямо начинали съ выговариванія дробей и съ ихъ письм. обозначенія. Вотъ цитата изъ Грамматеуса, нѣмецкаго автора XVI в.: «слѣдуетъ замѣтить, что всякая дробь имѣетъ 2 цифры, вверху и внизу линіи. Верхняя цифра называется числителемъ, нижняя—знаменателемъ. Выговариваютъ дроби такъ: сперва называютъ верхнюю цифру, затѣмъ нижнюю, съ прибавленіемъ слова «части». Напр. $\frac{2}{5}$ — двѣ пятыхъ части».

Въ русскихъ матем. рукописяхъ XVII в. мы видимъ то же самое, что въ западно-европейскихъ XVI и даже XV столѣтія, потому что, чтобы знанію дойти до Россіи, требовалось столѣтіе или болѣе. «Статія численая о всякихъ доляхъ указъ» начинается прямо съ письм. обозначенія дробей и съ указанія числителя и знаменателя. При выговариваніи дробей интересны такія особенности: четвертая доля называлась четью, доли же со знаменателями отъ 5 до 11 выражались словами съ окончаніемъ «ина», такъ что $^1/_7$ = седьмина, $^1/_5$ = пятина, $^1/_{10}$ = десятина; доли со знаменателями, большими 10, выговаривались съ помощью слова «жеребей», напр., $^5/_{13}$ = пять тринадцатыхъ жеребевъ. Нумерація дробей была прямо заимствована изъ западныхъ источниковъ, въ чемъ авторъ рукописи сейчасъ же сознается: «буди ти вѣдомо, како ся пишутъ доли въ цифирномъ счетѣ, по нѣмецкимъ землямъ, въ латинѣ и во французской земли». Числитель назывался верхнимъ числомъ, а знаменатель исподнимъ.

У Магницкаго (славянская ариѳметика 1703 г.) можно найти яркій примѣръ того, какъ смутно вырисовывалась глава о дробяхъ въ представленіи самихъ авторовъ учебниковъ. Первый разъ упоминаетъ о дробяхъ Магницкій совершенно неожиданно, когда у него идетъ дѣленіе съ остаткомъ. На стр. 17 рѣшается примѣръ 130 : 3, и въ концѣ рѣшенія говорится такъ: «И умествуй изъ 10 3-хъ: и придетъ 3, *еже напиши за чертою. А осталось изъ* 10, 1, *иже есть общій* всѣмъ тремъ и пишется послѣди сице: $^1/_3$». Больше никакихъ разъясненій нѣтъ совершенно. Слѣдующій примѣръ дѣленія съ остаткомъ приведенъ на стр. 21, и тутъ уже прямо подписанъ отвѣтъ 77446399 : 2864 = 27041 $^{965}/_{2864}$. Затѣмъ встрѣчается еще немало примѣровъ дѣленія съ остаткомъ, и во всѣхъ въ нихъ остатокъ подписывается именно такимъ образомъ, т.-е. въ видѣ числителя дроби, у которой дѣлитель служитъ знаменателемъ. Трудно сказать, что хотѣлъ изобразить этимъ Магницкій: хотѣлъ ли онъ представить отвѣтъ въ видѣ цѣлаго числа съ дробью, или же это вовсе, по его мнѣнію, не дробь, а только своеобразное обозначеніе дѣленія съ остаткомъ. Если это дробь, то лучше было бы отложить ее до полнаго разсмотрѣнія дробей, или, въ крайнемъ случаѣ, подробно ее объяснить; если же это не дробь, и если черта не отдѣляетъ числителя отъ знаменателя, то какая же сбивчивость и неясность возникнетъ для ученика, когда онъ начнетъ изучать дроби и увидитъ, что онѣ пишутся почему-то точно такъ же, какъ и остатокъ съ дѣлителемъ при дѣленіи съ остаткомъ. Почему все это такъ? Едва ли умъ ученика будетъ въ состояніи переварить этотъ вопросъ, и, вѣроятно, придется ему бѣдному просто запомнить и затвердить, не мудрствуя сверхъ силъ.

На стр. 42 начинается у Магницкаго вторая часть ариѳметики, въ которой говорится «о числахъ ломаныхъ или съ долями». «Что есть число ломаное?» — «Число ломаное ничто же ино есть», токмо часть вещи, числомъ объявленная, сирѣчь полтина есть, половина рубля, а пишется сице $^1/_2$ рубля, или четь $^1/_4$, или пятая часть $^1/_5$ или двѣ пятыя части $^2/_5$ и всякія вещи яковыя либо часть, объявлена числомъ, то есть ломаное число». Затѣмъ идетъ «нумерація», или «счисленіе въ доляхъ», т.-е. дается рядъ дробныхъ примѣровъ и указывается, какъ ихъ выговаривать.

Полезно еще здѣсь объяснить, что значатъ старинныя русскія выраженія: «полтретья», «полпята» и т. п. Полпята вовсе не значитъ половина пяти, но это будетъ $4^1/_2$, потому что, по нашему говоря, это половина пятаго, т.-е. 4 цѣлыхъ и отъ пятаго половина. Точно такъ же полтретья значитъ половина третьяго, т.-е. $2^1/_2$. У насъ осталось и сейчасъ выраженіе полтора; оно произошло изъ полвтора, т.-е. половина второго, слѣд., одинъ съ половиной, $1^1/_2$. Теперь понятна задача изъ Магницкаго на стр. 86: купилъ полторажды полтора аршина, далъ полтретьяжды полтретьи гривны, колико дати за полдевятажды полдевята аршина придетъ 20 рублевъ 2 алтына и $3^7/_8$ полуденьги.

Сокращеніе дробей и приведеніе къ одному знаменателю.

Умѣнье сокращать дроби восходитъ довольно далеко и замѣчается у математиковъ, жившихъ еще до Р. Х. Самымъ простымъ способомъ былъ тотъ, который практикуется и у насъ, т.-е. дѣленіе числителя и знаменателя на одно какое-ниб. небольшое число, въ родѣ 2, 3, 5 и т. д. Эвклидъ (за 300 л. до Р. Х.) въ совершенствѣ знаетъ способъ послѣдовательнаго дѣленія, т.-е. когда большее число дѣлится на меньшее, меньшее на первый остатокъ, первый на второй и т. п. до тѣхъ поръ, пока не будетъ найденъ общій дѣлитель. Этотъ способъ разработанъ былъ Эвклидомъ въ геометріи и имъ же предлагается для сокращенія дробей. Въ трудѣ ученаго Боэція (въ VI ст. по Р. Х.) рекомендуется послѣдовательное вычитаніе, какъ средство для сокращенія дробей; при этомъ, схоже съ Эвклидомъ, меньшее число отнимается отъ большаго столько разъ, сколько можно, первый остатокъ отнимается отъ меньшаго числа, второй остатокъ отъ перваго и т. д. до тѣхъ поръ, пока, подобно Эвклиду, не будетъ найдено общаго дѣлителя, на котораго затѣмъ и остается раздѣлить числителя и знаменателя. Кромѣ того, въ средніе вѣка составлялись довольно длинныя таблицы для сокращенія дробей; въ нихъ выписывалось подробно, на какихъ именно производителей можетъ разлагаться каждое изъ составныхъ чиселъ. Былъ и еще пріемъ, довольно своеобразный. Требуется, положимъ, сократить $^{14}/_{21}$. Для этого помножаемъ числителя и знаменателя дроби на такое число, чтобы новый числитель содержалъ въ себѣ прежняго знаменателя; въ нашемъ примѣрѣ достаточно помножить 14 на 3, получится 42, дѣлимъ это число на 21; будетъ 2, а весь отвѣтъ составитъ $^{2}/_{3}$. Этотъ способъ можетъ и теперь иногда пригодиться, напр., въ устномъ счетѣ.

Въ старинныхъ русскихъ ариѳметикахъ сокращеніе называлось такъ: «уменьшеніе долямъ». Это выраженіе неправильно, потому что величина дроби при сокращеніи не измѣняется и, слѣд., не уменьшается, а уменьшается только числитель и знаменатель; такимъ образ., здѣсь сама дробь смѣшивается съ ея членами, а это вовсе не одно и то же. Подобный неправильный терминъ встрѣчается еще и сейчасъ въ нѣмецкой литературѣ: verkleinern — уменьшеніе, вмѣсто слова сокращеніе.

Приведеніе дробей къ одному знаменателю встрѣчалось еще у древнихъ египтянъ, хотя они предпочитали обходиться безъ него. Общимъ знаменателемъ у нихъ не всегда было наименьшее кратное число; напр., чтобы привести къ одному знаменателю дроби $^{13}/_{15}$ и $^{7}/_{20}$, они не брали обязательно числа 60 и не замѣняли данныхъ дробей чрезъ $^{52}/_{60}$ и $^{21}/_{60}$; они пользовались знаменателемъ и 120 и 300 и т. п., и выражали предыдущія дроби чрезъ $^{104}/_{120}$ и $^{42}/_{120}$, $^{260}/_{300}$ и $^{130}/_{300}$. Мало того, знаменателемъ выбиралось иногда такое число, которое вовсе не дѣлилось на данныхъ знаменателей. Попытаемся, напр., привести дроби $^{13}/_{15}$ и $^{7}/_{20}$ къ общему знаменателю 30, тогда получится $^{26}/_{30}$ и $10^{1}/_{2}$ тридцатыхъ, такъ такъ тридцатыя доли въ полтора раза мельче двадцатыхъ. Такимъ образомъ, мы видимъ, что древніе египтяне не стѣснялись формой числителя и допускали дробныхъ числителей. Это указываетъ на значительное пониманіе ими свойствъ дробей: они, слѣд., вникали въ ихъ смыслъ, умѣли обращаться съ ними свободно и увѣренно и примѣняли ихъ, смотря по удобству, къ различнымъ особенностямъ задачъ. Средневѣковая ариѳметика уступаетъ въ этомъ отношеніи древней. Въ ней гораздо больше механизма, заученныхъ правилъ, строго очерченныхъ пріемовъ, и поэтому гораздо меньше свободнаго соображенія. Это обусловливается общимъ отпечаткомъ средневѣковой науки, какъ исключительно ремесленной, сухой, не позволявшей вникать въ суть и вертѣвшейся на формахъ. Въ XVI в. по Р. X. учебники относительно этого говорили кратко и внушительно: «перемножь крестъ-накрестъ, затѣмъ перемножь знаменателей!» Косой крестъ считался даже знакомъ приведенія дробей къ одному знаменателю, потому что онъ лучше всего указывалъ порядокъ вычисленія: достаточно числителя первой дроби помножить на знаменателя второй, а числителя второй дроби на знаменателя первой,—это будутъ числители, общимъ же знаменателемъ будетъ произведеніе данныхъ знаменателей. Похоже на это, и знакомъ дѣленія дробей служилъ въ то время косой крестъ, потому что и при дѣленіи надо множить крестъ на крестъ, т.-е. числителя одной дроби на знаменателя другой.

Механическое правило, по которому дроби приводятся къ одному знаменателю, касалось не только двухъ дробей, но и нѣсколькихъ. Дано, напр., выразить въ одинаковыхъ доляхъ $^4/_{15}$, $^7/_{20}$, $^9/_{25}$. Тогда составляли сперва произведеніе 15 на 20 и приводили первыя двѣ дроби въ такой видъ: $^{80}/_{300}$, $^{105}/_{300}$. Потомъ составляли произведеніе 300 на 25 и получали общимъ знаменателемъ число 7500, такъ что 3 данныхъ дроби превращались уже въ $^{2000}/_{7500}$, $^{2625}/_{7500}$, $^{2700}/_{7500}$. Знаменатель, какъ видимъ, возросъ до значительной величины, и все оттого, что математики не научились пользоваться наименьшимъ кратнымъ данныхъ знаменателей. У Магницкаго дроби $^2/_3$, $^3/_4$, $^5/_6$, $^4/_5$ приведены къ знаменателю 360, вмѣсто того, чтобы имъ имѣть общаго знаменателя 60; у него получаются такіе отвѣты: $^{240}/_{360}$, $^{270}/_{360}$, $^{300}/_{360}$ $^{288}/_{360}$ и это послѣ ряда длинныхъ вычисленій, занимающихъ цѣлую страницу книги. Даже въ ариѳметикѣ Степана Румовскаго (С.-Петерб., 1760 г.) дроби $^1/_3$ и $^2/_9$ приводятся къ общему знаменателю 27, а не 9, какъ это сдѣлали бы мы. Изъ всего этого видно, что правило, по которому общ. знаменателемъ должно служить наименьшее кратное, является сравнительно новымъ правиломъ и замѣнялось прежде тѣмъ порядкомъ, что общій знаменатель составлялся прямо перемноженіемъ данныхъ знаменателей.

Дѣйствія надъ простыми дробями.

Въ настоящее время принято во всѣхъ учебникахъ, чтобы дѣйствія надъ дробями шли въ такомъ порядкѣ: сложеніе, вычитаніе, умноженіе и дѣленіе. Прежде было иначе: старинные авторы предпочитали начинать съ умноженія и дѣленіе, и потомъ уже они переходили къ сложенію и вычитанію: при этомъ они руководствовались тѣмъ, что для умноженія и дѣленія не надо приводить къ общему знаменателю и, слѣд., эти два дѣйствія гораздо легче тѣхъ двухъ.

Мы будемъ держаться общепринятаго порядка и поэтому скажемъ сперва нѣсколько словъ о сложеніи. Изъ его особенностей отмѣтимъ только ту, которая касается сложенія нѣсколькихъ дробей. Для этого, обыкновенно, складывали сперва только двѣ дроби, сумму ихъ сокращали, если только она сокращается: потомъ къ ней прикладывали третью дробь и сумму опять сокращали, если только можно, и т. д. вели сложеніе до послѣдней дроби. Въ XVI ст. по Р. X.

умѣли, впрочемъ, складывать нѣсколько дробей сразу, но тогда ужъ принимали за общаго знаменателя произведеніе всѣхъ знаменателей. Для облегченія сложенія придумывались особенныя таблицы, въ которыхъ были помѣщены суммы наиболѣе употребительныхъ долей. Напр., итальянецъ Леонардо Фибоначи (въ XIII ст. по Р. Хр.) даетъ въ своемъ учебникѣ таблицу сложенія дробей, у которыхъ знаменателями служатъ числа: 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10.

Вычитаніе. Древніе египтяне замѣняли вычитаніе дробей сложеніемъ. Вмѣсто того, чтобы привести дроби къ одному знаменателю и потомъ вычесть числителей, какъ это вездѣ дѣлается, они задавались вопросомъ: какое число надо прибавить къ меньшему данному числу, чтобы получить большее данное? Напр., сколько недостаетъ до единицы у $\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{10}+\frac{1}{30}+\frac{1}{45}$ (египтяне, обыкновенно, пользовались только основными дробями, т.-е. съ числителями, равными единицѣ); они рѣшали этотъ вопросъ слѣдующимъ образомъ: общій знаменатель 45, складываемъ $11^1/_4$, $5^1/_2$, $^1/_8$, $4^1/_2$, $1^1/_2$, 1, будетъ всего $23\ ^1/_2\ ^1/_4\ ^1/_8$; до $^1/_3$ не хватаетъ $\frac{6^1/_8}{45}=\frac{5}{45}\frac{1^1/_8}{45}=\frac{1}{9}\frac{1}{40}$; всего до 1 не хватаетъ $^1/_3\ ^1/_9\ ^1/_{40}$—это есть отвѣтъ. Читатель, навѣрное, понялъ, что здѣсь между дробями пропущены знаки сложенія: египтяне ихъ и не ставили и полагали, что достаточно написать дроби рядомъ, чтобы принять ихъ за слагаемыя.

Умноженіе. Умножить какое-нибудь количество на правильную дробь значитъ найти такую долю этого количества, какая выражается множителемъ. Это такъ ясно и понятно. Тѣмъ не менѣе нахожденіе частей числа почему-то отдѣлялось и отдѣляется отъ умноженія и принимается за какое то особенное вычисленіе, которое должно яко бы предшествовать 4 ариѳм. дѣйствіямъ. Почему все это такъ, и гдѣ кроется корень недоразумѣнія, — объяснить трудно, такъ какъ исторія ариѳметики не даетъ надежнаго ключа въ разгадкѣ. Но любопытно сопоставить это дѣло съ другимъ недоразумѣніемъ, которое нѣсколько вѣковъ тому назадъ особенно авторитетно выставлялось на первый планъ, считаясь чѣмъ-то непреложнымъ, а въ настоящее время оно оставлено и забыто. Касается оно слѣдующаго. Въ вычисленіяхъ съ дробными числами, кромѣ чиселъ цѣлыхъ и дробей, встрѣчались еще такъ наз. доли отъ долей: это были длинныя формулы, состоящія изъ огромнаго ряда дробей, которыя не подлежали упрощенію и въ сыромъ видѣ входили въ дѣйствіе. Лучше всего пояснить это на примѣрѣ: сложить $^2/_3$ отъ $^4/_5$ отъ $^5/_6$ съ $^7/_8$ отъ $^9/_{10}$, или еще: изъ 10 вычесть $3^2/_3$ отъ $2^1/_2$ отъ $^4/_5$. Ясно, что здѣсь невычисленныя формулы, и что прежде чѣмъ складывать или вычитать, надо привести слагаемыя или же уменьшаемое съ вычитаемымъ въ обработанный видъ. Получится $^2/_3$ отъ $^4/_5$ $^5/_6 = \frac{40}{90} = ^4/_9$; $^5/_6$ отъ $^7/_8$ отъ $^9/_{10} = \frac{315}{480} = \frac{21}{32}$; теперь эти дроби возможно сложить, и въ суммѣ будетъ $\frac{317}{288} = 1\frac{29}{288}$. Такъ же и во второмъ примѣрѣ приведемъ сперва вычитаемое къ должному виду, и тогда уже произведемъ дѣйствіе; $3^2/_3 \times 2^1/_2 \times \frac{4}{5} = \frac{11.\ 5.\ 4.}{3.\ 2.\ 5.} = \frac{22}{3} = 7^1/_3$, $10 - 7^1/_3 = 2^2/_3$. Совершенно нельзя понять, къ чему требовалось математикамъ затруднять сложеніе и вычитаніе дробей особенными правилами, какъ обращаться съ долями долей, а между тѣмъ эти правила разсматривались на нѣсколькихъ страницахъ, занимавшихъ много параграфовъ, требовали большого количества упражненій и приносили только вредъ, такъ какъ на нихъ безъ пользы уходило много времени и труда. Теперь уже наши дѣти не изучаютъ отдѣльныхъ правилъ, какъ складывать или вычитать доли долей, и въ этомъ отношеніи имъ легко. Будемъ же надѣяться, что подобно этому отдѣлу исчезнетъ въ учебникахъ и другой лишній отдѣлъ — нахожденіе частей цѣлаго, и присоединится туда, гдѣ ему настоящее мѣсто, т.-е. къ умноженію дробей.

Замѣтимъ, что вычисленія съ долями долей очень древняго происхожденія, они ведутъ свое начало отъ греческаго математика Герона (во II ст. до Р. Х.). Были выработаны спеціальные пріемы, какъ обозначать часть дробнаго числа. Напр., у арабовъ примѣнялось такое обозначеніе: $\frac{5}{8} \mid \frac{3}{7} \quad \frac{4}{5}$, которое должно показывать $^4/_5$ отъ $^3/_7$ отъ $^5/_8$, т.-е. окончательно $^3/_{14}$. У Леонардо Фибоначчи (въ XIII ст. по Р. Х.) формула $0\ \frac{6}{7}\ \frac{8}{9}\ \frac{9}{10}\ 22$ равна, согласно нашему порядку, $22 + \frac{6}{7}\ \frac{8}{9}\ \frac{9}{10}$, всего $22 \frac{24}{35}$, а формула $\frac{2}{3}\ \frac{5}{8}\ \frac{4}{9}$ о 11 равна $11 + \frac{4}{9} + \frac{5.\ 4}{8.\ 9} + \frac{2.\ 5.\ 4}{3.\ 8.\ 9}$. Вотъ какая путаница вносилась этимъ отдѣломъ совершенно безъ всякой нужды. Также и въ русскихъ матем. сборникахъ XVII–XVIII в. этотъ отдѣлъ давалъ не мало сбивчивости. Онъ назывался «вынимапіе дробовое» или «вычитаніе доли изъ долей». Его нельзя было смѣшивать съ другимъ дѣйствіемъ, которому придано созвучное заглавіе, т.-е. съ «вычитаніемъ въ доляхъ», гдѣ разсматривается наше вычитаніе дробныхъ чиселъ. Составителю учебника приходилось не мало разъяснять, чтобы предостеречь ученика отъ смѣшиванія вычитанія и нахожденія части, такъ что предъ вычитаніемъ помѣщено было отдѣльное разъясненіе «о разумѣніи, что есть доли изъ долей».

Обратимся теперь къ чистому умноженію дробей, какъ отдѣльному дѣйствію. Обособляться оно стало только въ средніе вѣка, и тогда ему придано было названіе «умноженіе», древняя же математика ограничивалась только нахожденіемъ простѣйшихъ частей числа, тѣмъ болѣе, что *даже и въ цѣлыхъ числахъ она стремилась привести* умноженіе къ сложенію. У Бернелинуса, ученика римскаго папы Сильвестра II (въ XI в.), умноженіе $\frac{1}{36}$ на $\frac{1}{3}$ совершается по римскимъ образцамъ слѣдующимъ образомъ: $\frac{1}{36}$ обращается въ доли фунта; въ фунтѣ 12 унцій, слѣд., унція равна $\frac{1}{12}$, а такъ какъ въ унціи 24 скрупула, то дробь $\frac{1}{36}$ обратилась въ 8 скрупуловъ; $\frac{1}{3}$ равна $\frac{1}{3}$ фунта, т.-е. 4 унціямъ: множимъ теперь $\frac{1}{3}$ фунта на $\frac{1}{3}$ унціи, т.-е. на 8 скрупуловъ, и получается $\frac{1}{9}$ унціи, иначе сказать $2\frac{2}{3}$ скрупула, а такъ какъ 2 скрупула составляютъ особую мѣру, которая называется «emisescla», то окончательный отвѣтъ представится въ видѣ $1\frac{1}{3}$ «emisescla». Да, можно сказать, что способъ Бернелинуса очень и очень нелегокъ.

У Фибоначчи (XIII ст. по Р. Х.) подъ вліяніемъ арабскихъ и индусскихъ образцовъ нѣтъ вычисленія съ унціями, и дѣло идетъ просто съ отвлеченными долями. Фибоначчи пользуется такимъ способомъ. Сперва онъ перемножаетъ числителей, а потомъ получившееся число дѣлитъ на перваго знаменателя и, затѣмъ, уже это частное дѣлитъ на второго знаменателя.

Петръ Рамусъ, знаменитый французскій математикъ и философъ XVI столѣтія, даетъ въ главѣ о дробяхъ, какъ и въ другихъ отдѣлахъ математики, много свѣжихъ и новыхъ мыслей. Онъ особенно настаиваетъ на томъ, что ученикамъ *надо объяснять* правила, а не только принуждать выучивать ихъ наизусть, и что правила надо выводить, а не только примѣнять готовыя къ примѣрамъ. Однако, самъ Рамусъ, вслѣдствіе той туманности, которую придавали ариѳметикѣ его предшественники, не всегда одинаково ясно и удачно ведетъ свое изложеніе, такъ что въ случаѣ умноженія дробей мы находимъ у него такой запутанный выводъ: «*дано умножить* $^3/_4$ *на* $^2/_3$, *это* значитъ найти $^3/_4$ части отъ дроби $^2/_3$; разсуждаемъ по тройному правилу—1 относится къ 3, какъ 2 къ 6, и 1 относится къ 4, какъ 3 къ 12, *слѣдовательно, отвѣтъ будетъ* $^6/_{12}$: *это и есть произведеніе* $^2/_3$ на $^3/_4$».

Русскіе математики XVII и XVIII в. слѣдовали въ главѣ объ умноженіи западно-европейскимъ образцамъ. Они разсматривали 3 случая: a) умноженіе дроби на цѣлое, b) умноженіе дроби на дробь и c) умноженіе смѣшанныхъ чиселъ. Въ концѣ, въ такъ наз. «строкѣ генераль» давалось общее правило перемноженія дробей. Неизмѣняемость произведенія при перестановкѣ производителей объяснялась въ такихъ выраженіяхъ: «вѣдаи доли изъ доли умноженіе какъ $^1/_3$ изъ $^1/_4$ умножаи придетъ $^1/_{12}$ такожъ $^1/_4$ изъ $^1/_3$ то-жъ $^1/_{12}$». Знакъ при умноженіи дробей всегда употреблялся такой: одна горизонтальная черта проводилась отъ числителя къ числителю, а другая отъ знаменателя къ знаменателю, и это служило хорошимъ знакомъ дѣйствія, такъ какъ этимъ обозначался порядокъ вычисленія.

Замѣчательно мѣсто у Магницкаго, въ которомъ онъ трактуетъ объ умноженіи простыхъ дробей. Здѣсь явственно вылилась вся нетребовательность по отношенію ко всякимъ выводамъ и объясненіямъ. Достаточно сообщить правило, а кромѣ него что же еще надо? такъ, навѣрное, думаетъ Магницкій, и мы не можемъ отказать себѣ въ томъ, чтобы не привести отрывка изъ его ариѳметики. Стр. 54 «Мултипликаціо, или умноженіе въ доляхъ. Что въ семъ предѣленіи достоитъ вѣдати. Впервыхъ подобаетъ вѣдати яко во умноженіи нѣсть потреба да сравняеши доли къ единакому знаменателю: но яковы доли будутся, таковы и умножати числители чрезъ числители, и знаменатели чрезъ знаменатели, якоже $^3/_8$ чрезъ $^1/_4$. 3 чрезъ 1 будетъ 3, а 8 чрезъ 4, будетъ 32, и еже отъ числителей произыдетъ напиши надъ чертою, а отъ знаменателей произведеное напиши подъ чертою и будетъ $^3/_{32}$». Итакъ, въ ариѳметикѣ дается только правило, безъ вывода, зато послѣ правила идетъ цѣлый рядъ примѣровъ, всего 60 номеровъ, съ отвѣтами, и предлагается заняться продѣлываніемъ этихъ примѣровъ, чтобы, такъ сказать, набить руку въ этомъ правилѣ.

Преемники Магницкаго, т.-е. составители русскихъ учебниковъ XVIII и даже XIX в., не оказались счастливѣе его въ этомъ случаѣ. Они тоже или не даютъ никакихъ объясненій умноженія дробей, или даютъ объясненія спутанныя и трудныя. Такъ, въ ариѳметикѣ Адодурова (1740 г.) про умноженіе дробей объясняется на 29 страницахъ, причемъ объясненіе дано очень растянутое, многословное и малоубѣдительное. У Румовскаго (1760 г.) передъ дробями расположены пропорціи, и умноженіе дробей выводится изъ общаго свойства пропорцій, именно, что произведеніе крайнихъ членовъ равно произведенію среднихъ членовъ. И сами пропорціи являются для учениковъ темнымъ мѣстомъ, а ужъ про выводъ изъ нихъ и говорить нечего, особенно когда онѣ идутъ на буквахъ, какъ это видимъ у Румовскаго. Порядочное изложеніе встрѣчаемъ мы у Загорскаго (1806 г.), но уже у Павла Цвѣткова (1834 г.) опять тянется старая пѣсня. «Какъ множится дробь на дробь?» спрашиваетъ онъ, и отвѣчаетъ: «При умноженіи дробей на дроби надлежитъ множить числителей на числителей, а знаменателей на знаменателей». Этимъ заканчивается § 34, и авторъ уже болѣе не желаетъ возвращаться къ подобному скучному вопросу, къ которому, вдобавокъ, никакъ еще не придумать подходящаго объясненія. И это въ то время, когда Цвѣтковъ для болѣе легкаго вопроса, для умноженія дроби на цѣлое, находитъ нужнымъ и возможнымъ дать толковое объясненіе.

Да, умноженіе на дробь и въ старину, и еще теперь является однимъ изъ самыхъ больныхъ мѣстъ начальной ариѳметики.

Дѣленіе. Дѣленіе дробей шло все время правильнымъ путемъ, безъ скачковъ и отклоненій въ сторону. Еще древніе египтяне вполнѣ логично заключали, что дѣленіе обратно умноженію, и что поэтому его можно привести къ умноженію. По своей привычкѣ къ основнымъ дробямъ, т.-е. съ числителемъ, равнымъ единицѣ, они и дѣленіе разсматривали съ точки зрѣнія этихъ дробей. Примѣръ: $2 : 1\,{}^1/_3\,{}^1/_4$. Здѣсь египтяне ставили вопросъ: на какое число надо помножить выраженіе $1\,{}^1/_3\,{}^1/_4$, иначе сказать $1 + {}^1/_3 + {}^1/_4$, чтобы получить въ произведеніи 2? Для этого помножаемъ количество $1\,{}^1/_3\,{}^1/_4$ на ${}^2/_3\,{}^1/_3\,{}^1/_6\,{}^1/_{12}$ и получаемъ ${}^{283}/_{144}$; при этомъ отдѣльно помножается множимое число на ${}^2/_3$, на ${}^1/_3$, на ${}^1/_6$ и на ${}^1/_{12}$, съ такимъ расчетомъ, чтобы каждое слѣдующее произведеніе было вдвое меньше предыдущаго. Такъ какъ ${}^{283}/_{144}$ отличается отъ даннаго числа 2 на ${}^3/_{144}$, т.-е. на ${}^1/_{72}\,{}^1/_{144}$, то остается рѣшить вопросъ: на какое число надо умножить $1\,{}^1/_3\,{}^1/_4$, или ${}^{228}/_{144}$, чтобы получить сперва ${}^1/_{144}$? Очевидно, на ${}^1/_{228}$. Чтобы получить ${}^1/_{72}$, надо умножить на ${}^1/_{114}$. Такимъ образомъ, послѣ довольно запутаннаго вычисленія получается итогъ: ${}^2/_3\,{}^1/_3\,{}^1/_6\,{}^1/_{12}\,{}^1/_{114}\,{}^1/_{288}$, который и считался у египтянъ вполнѣ нормальнымъ, какъ составленный изъ основныхъ дробей (дробь ${}^2/_3$ у нихъ тоже признавалась основной, это единственная изъ дробей съ числителемъ 2, у нея даже былъ свой специальный знакъ).

Римскій способъ дѣленія дробей напоминаетъ собой римскій-же способъ дѣленія цѣлыхъ чиселъ. Вотъ примѣръ Бернелинуса (въ XIII ст. по Р. Х.). Раздѣлить 28 на $1\,{}^3/_4$. Дѣлится 28 не на $1\,{}^3/_4$, а на 2, т.-е. дѣлитель дополняется до цѣлаго числа. $28 : 2 = 14$; теперь надо составить лишекъ или сдачу, которую слѣдуетъ возвратить дѣлимому; такъ какъ на каждую часть взято лишняго по ${}^1/_4$, то на всѣ 14 частей пришлось $3\,{}^1/_2$; дѣлимъ $3\,{}^1/_2$ на 2, будетъ въ частномъ 1, въ остаткѣ $1\,{}^1/_2$; сдачи возвратится ${}^1/_4$, всего составится въ дѣлимомъ $1\,{}^3/_4$: дѣлимъ это количество на $1\,{}^3/_4$ и получимъ въ частномъ 1: такимъ образомъ, весь искомый результатъ будетъ $14 + 1 + 1 = 16$.

Неморарій, математикъ среднихъ вѣковъ, современникъ Бернелинуса, пользуется для дѣленія аналогіей съ умноженіемъ и даетъ слѣдующій искусственный пріемъ. Задано раздѣлить ${}^2/_3$ на ${}^4/_5$. Тогда числитель и знаменатель первой дроби увеличивается въ 4×5 разъ и затѣмъ примѣняется правило: числителя раздѣлить на числителя, а знаменателя на знаменателя, подобно тому, какъ въ умноженіи дробей множатся числитель на числителя и знаменатель на знаменателя.

Получается формула: $\frac{2}{3} : \frac{4}{5} = \frac{2.4.5}{3.4.5} : \frac{4}{5} = \frac{2.4.5:4}{3.4.5:5} = \frac{2.5}{3.4}$.

Леонардо Фибоначчи, итальянскій математикъ XIII вѣка, совѣтовалъ приводить дроби къ одному знаменателю и потомъ уже дѣлить, пользуясь аналогіей съ именованными числами, такъ какъ тамъ, обыкновенно, мѣры раздробляются въ одинаковое наименованіе, и затѣмъ полученныя числа дѣлятся. Примѣръ у Фибоначчи слѣдующій: $523\frac{1}{10}\frac{7}{9} : 17\frac{1}{6}\frac{2}{5} = \frac{47149}{90} : \frac{1581}{90} = \frac{47149}{1581}$. Въ XVI ст. по Р. Х. на сцену вышло новое правило дѣленія дробей: надо дѣлимое помножить на обращеннаго дѣлителя. Примѣръ: $^3/_4 : ^2/_3$. Для рѣшенія его множимъ $^3/_4$ на $^3/_2$, получимъ $^9/_8$, это и будетъ вѣрнымъ отвѣтомъ. Въ объясненіе этого правила, равно какъ и всѣхъ другихъ, авторы учебниковъ входить не любили. Они только ограничивались тѣмъ, что приводили самое правило и потомъ нѣсколько примѣровъ съ рѣшеніемъ. Ученики же запоминали правило и практиковались въ примѣненіи его къ вычисленіямъ.

Знакомъ дѣленія до XVIII ст. являлись, обыкновенно, 2 перекрещивающихся черты, которыя шли отъ числителя первой дроби къ знаменателю второй и отъ знаменателя первой къ числителю второй. Только съ развитіемъ алгебры, когда потребовался общій знакъ дѣленія и для цѣлыхъ чиселъ и для дробей, стали обозначать это дѣйствіе такъ же въ дробяхъ, какъ и въ цѣлыхъ числахъ, т.-е. двумя точками.

Приведемъ еще небольшой интересный отрывокъ, который хорошо показываетъ, къ какимъ хитростямъ нужно было прибѣгать средневѣковымъ ученымъ, когда имъ давался трудный примѣръ съ дробями. Въ Зальцбургскомъ (Австрія) сборникѣ, относящемся къ XII вѣку, надо было вычислить земной радіусъ по окружности земли. Извѣстно, что окружность въ $3^1/_7$ раза больше своего радіуса, и поэтому, чтобы получить радіусъ земли, достаточно ея окружность раздѣлить на $^{22}/_7$. Принимая окружность за 252000, составитель находитъ $^7/_{22}$ этого числа, т.-е. умноженіемъ на $^7/_{22}$ замѣняетъ дѣленіе на $^{22}/_7$. Умноженіе же онъ ведетъ такъ. Сперва вычисляетъ $^1/_{22}$ всего числа, получится $11454^1/_2\ ^1/_{22}$, затѣмъ вычитаетъ эту величину изъ 252000, будетъ $240544^1/_2\ ^{21}/_{22}$. Треть этого числа и составитъ искомый отвѣтъ, т.-е. земной радіусъ, такъ какъ $^{21}/_{22} : 3 = ^7/_{22}$.

Шестидесятеричныя дроби.

Древніе халдеи, образованность которыхъ исходитъ изъ глубины вѣковъ и позволяетъ прослѣдить свои пути далѣе, чѣмъ на 1000 лѣтъ до Р. Х., издавна любили считать по копамъ, т.-е. группами по 60. Почему они остановились именно на этомъ числѣ,—теперь рѣшить, конечно, нелегко, но выборъ этотъ надо считать чрезвычайно удачнымъ, такъ какъ число 60 обладаетъ массой дѣлителей и, слѣдов., рѣже приводитъ къ дробямъ, чѣмъ большинство другихъ чиселъ, и позволяетъ дѣлать много упрощеній. Халдеи примѣняли шестидесятеричный счетъ вездѣ: и въ торговыхъ дѣлахъ, и въ научныхъ выкладкахъ, особенно же въ любимой своей наукѣ, которая многимъ обязана ихъ трудамъ,—въ астрономіи. Привычка къ числу 60 сама собой перешла и на дроби, и вотъ у халдеевъ явились шестидесятеричныя дроби, т. е. со знаменателемъ 60, $3600 = 60 . 60$, $216000 = 60 . 60 . 60$. Эти дроби примѣнены были въ астрономіи къ дѣленію времени, такъ что часъ сталъ дѣлиться на 60 равныхъ частей (минутъ), минута на 60 секундъ, секунда на 60 терцій и т. д. Всѣ простыя дроби халдеями обыкновенно приводились въ шестидесятыя доли и даже, напр., $^2/_3$ они выражали не иначе, какъ черезъ $^{40}/_{60}$.

Отъ халдеевъ шестидесятеричныя доли перешли къ индусамъ и арабамъ, и также къ грекамъ. Особенно онѣ были разработаны греческими учеными, жившими въ Александріи въ первые вѣка по Р. Х. Знаменитый астрономъ Клавдій Птоломей (во II в. по Р. Х.), система котораго держалась болѣе тысячи лѣтъ и признавалась въ свое время геніальнымъ твореніемъ, писалъ, обыкновенно, шестидесятеричныя дроби безъ знаменателя. Для этого онъ цѣлыя числа подчеркивалъ горизонтальной чертой, шестидесятыя доли отмѣчалъ значкомъ $'$, 3600-ыя значкомъ $''$, 216000-ыя доли значкомъ $'''$ и т. д., смотря по ихъ разряду. И это дѣлалось не только при измѣреніи времени и при градусахъ дуги, но и въ мѣрахъ длины и въ другихъ мѣрахъ. Такъ, напр., Птоломей выражаетъ сторону правильнаго вписаннаго десятиугольника черезъ $\underline{37}\ 4'55''$, при діаметрѣ круга, равномъ 120. Это значитъ, что если діаметръ составляетъ 120, то сторона равняется $37\ \frac{4}{60}\ \frac{55}{3600}$ такихъ же единицъ (по порядку, принятому въ настоящее время въ геометріи, сторону эту можно выразить въ десятичныхъ дробяхъ чрезъ 0,30902, при діаметрѣ, равномъ единицѣ.

Горизонтальная черта, которой подчеркивались цѣлыя числа, была замѣнена впослѣдствіи знакомъ ^{0}, и самимъ долямъ были присвоены названія: минуты, секунды, терціи и т. д. Что значатъ эти слова? Минута значитъ «доля», и долго послѣ Птоломея, болѣе тысячи лѣтъ, всевозможныя доли всегда назывались минутами (minutiae). Къ слову минута присоединялось, обыкновенно, слово прима (prima), и выраженіе «minuta prima» обозначало первыя доли, иначе сказать доли перваго порядка, т.-е. со знаменателемъ 60. Далѣе шли доли со знаменателемъ 3600, онѣ назывались минутами секундами, т.-е. долями второго порядка, такъ какъ 3600 = 60.60. Потомъ слѣдовали минуты терціи, доли третьяго порядка, у которыхъ знаменатель 60.60.60.

Шестидесятеричныя дроби, какъ мы уже сказали, служили не только для геометріи и астрономіи, но являлись преобладающими во всѣхъ наукахъ и даже въ практической жизни. Онѣ стали терять свое значеніе только тогда, когда начали вводиться десятичныя дроби, приблизительно около XVI в. по Р. Х. Кромѣ того, въ торговыхъ разсчетахъ нѣкоторую конкуренцію имъ составляли обыкновенныя дроби, которыя носили названіе «простонародныхъ», а также унціи, изучавшіяся во всѣхъ латинскихъ школахъ.

Десятичныя дроби.

Первые намеки на десятичныя дроби можно прослѣдить у творцовъ ариѳметики, — индусовъ. Они пользовались ими при извлеченіи квадратныхъ корней, въ тѣхъ случаяхъ, когда корень не извлекается точно: тогда они приписывали столько паръ нулей, сколько желательно имѣть лишнихъ знаковъ въ корнѣ. Индусы писали десятичныя дроби со знаменателями, и имъ не удалось распространить общей десятичной нумераціи также и на дроби. Заслуга въ этомъ отношеніи принадлежитъ арабамъ, и въ частности тѣмъ арабамъ, которые жили въ Испаніи. Между 1130 и 1150 г. по Р. Х. появилось въ Толедо сочиненіе «Практическая ариѳметика алгоризма», принадлежащее Іоанну Севильскому. У него уже замѣтны явственные слѣды десятичныхъ дробей, и притомъ съ такимъ характеромъ, какой онѣ носятъ у насъ.

Послѣ Іоанна Севильскаго десятичныя дроби какъ-то стушевываются, тѣмъ болѣе, что тѣ времена были не особенно благопріятны вообще для западно-европейской науки. Но идея не пропала, и ее мы видимъ возрожденной у Кардана (XVI ст). Между прочимъ, онѣ стали примѣняться въ тригонометріи для вычисленія синусовъ. Кромѣ того, стали ими пользоваться при дѣленіи съ остаткомъ, чтобы выразить отвѣтъ точнѣе и дать въ частномъ не только цѣлыя числа, но и рядъ долей съ десятичными знаменателями. Грамматеусъ въ 1523 году совѣтуетъ примѣнять десятичныя дроби къ такому случаю. Пусть требуется сравнить $^5/_8$ съ $^2/_3$ и узнать, которая величина больше. Тогда мы къ каждому числителю приписываемъ по нулю, иначе сказать—раздробляемъ въ десятыя доли, и дѣлимъ на знаменателя, получимъ $62^1/_2$ и $66^2/_3$, слѣд., вторая величина болѣе первой.

Честь полнаго введенія десятичныхъ дробей и ихъ толковаго объясненія приписывается Симону Стевину изъ Брюгге (въ Бельгіи), жившему съ 1548 по 1620 г. Заглавіе его сочиненія такое: «La disme enseignant facilement expédier par nombres entiers sans rompouz tous comptes se rencontrans aux affaires des hommes». Вмѣсто запятой, отдѣляющей цѣлыя числа отъ долей, это сочиненіе рекомендуетъ ставить нуликъ, заключенный въ скобки. Точно также и у долей былъ при каждомъ разрядѣ значекъ, напр., 34, 7605 писалось слѣдующимъ образомъ: 34 (⁰) 7 (¹) 6 (²) 0 (³) 5 (⁴). Съ такимъ обозначеніемъ десятичныя дроби входили и въ дѣйствія. Положимъ, требовалось умножить 0, 0426 на 0, 28; тогда вычисленіе располагалось такъ:

$$
\begin{array}{r}
4\,(^2)\,2\,(^3)\,6\,(^4) \\
2\,(^1)\,8\,(^2) \\
\hline
3 \quad 4 \quad 4 \quad 8 \\
8 \quad 5 \quad 2 \quad 0 \quad \\
1\,(^2)\,1\,(^3)\,9\,(^4)\,2\,(^5)\,8\,(^6)
\end{array}
$$

Сочиненіе Стевина появилось первоначально въ 1585 г. на фламандскомъ нарѣчіи, а потомъ уже оно было переведено и на французскій языкъ. Десятыя, сотыя и т. д. доли называлисъ долями первыми, вторыми и т. д. (primes, secondes). Стевинъ ясно видѣлъ, что десятичныя дроби были бы особенно полезны въ томъ случаѣ, если бы вездѣ была принята десятичная система мѣръ; потому онъ энергично настаивалъ на введеніи десятичной системы мѣръ. Впрочемъ, его сочиненіе не сдѣлалось извѣстнымъ за предѣлами отечества, и, напр., въ Германіи заслуга введенія десятичныхъ дробей приписывается Бейеру (1563—1625).

Самъ Бейеръ такимъ образомъ излагаетъ путь, которымъ онъ дошелъ до мысли о десятичныхъ дробяхъ: «въ свободное отъ своей службы (Бейеръ былъ врачомъ) время любилъ я иногда заняться астрономіей и математикой; и я обратилъ вниманіе на то, что техники и ремесленники, когда измѣряютъ какую-нибудь длину, то очень рѣдко и лишь въ исключительныхъ случаяхъ выражаютъ ее въ цѣлыхъ числахъ одного наименованія, обыкновенно имъ приходится или брать мелкія мѣры, или обращаться къ дробямъ; точно также астрономы измѣряютъ величины не только въ градусахъ, но и въ доляхъ градусовъ, т. е. въ минутахъ, секундахъ и т. д.; но мнѣ кажется, что ихъ дѣленіе на 60 частей не такъ удобно, какъ дѣленіе на 10, на 100 частей, потому что въ послѣднемъ случаѣ гораздо легче складывать, вычитать и вообще производить ариѳметическія дѣйствія; мнѣ кажется, что десятичныя доли, если бы ихъ ввести вмѣсто шестидесятеричныхъ, пригодились бы не только для астрономіи, но и для всякаго рода вычисленій». Для наглядности Бейеръ дѣлитъ прямую линію на 10 равныхъ частей и называетъ каждый отрѣзокъ примой, т.-е. первой долей, или долей перваго порядка; и каждая прима дѣлится, въ свою очередь, на 10 равныхъ частей и даетъ 10 секундъ, т.-е. долей второго порядка; изъ секунды получается 10 терцій и т. д. Такимъ образомъ ясно видно, что Бейеръ воспользовался для десятичныхъ дробей тѣми же названіями, какія были въ употребленіи въ шестидесятеричныхъ дробяхъ. Такое же заимствованіе сдѣлалъ онъ и въ записываніи дробей, потому что, напр., 123, 459872 Бейеръ пишетъ такъ: $\overset{0}{123}.\ \overset{\mathrm{I}}{4}.\ \overset{\mathrm{II}}{5}.\ \overset{\mathrm{III}}{9}.\ \overset{\mathrm{IV}}{8}.\ \overset{\mathrm{V}}{7}.\ \overset{\mathrm{VI}}{2}.$ или же $\overset{0}{123}\ 45\overset{\mathrm{III}}{9}87\overset{\mathrm{VI}}{2}$, т.-е. приводя доли въ трехразрядные классы, или же, наконецъ, $\overset{0}{123}.\ 45987\overset{\mathrm{VI}}{2}$ — здѣсь отмѣченъ римской цифрой VI только послѣдній разрядъ. По этой системѣ 0,000054 пишется так: $5\overset{VI}{4}$. Для умноженія дается такое правило: поставь надъ послѣднимъ справа разрядомъ отвѣта такой значекъ, который равнялся бы суммѣ значковъ множимаго и множителя, стоящихъ надъ ними съ праваго края: всѣ остальные разряды произведенія опредѣляются по этому крайнему разряду. Примѣръ: $12\overset{III}{4}.\ 38\overset{VI}{5}$ умножить на $64\overset{IV}{3}$: умноживъ 124385 на 643, получимъ въ отвѣтѣ 79979555, и остается только поставить надъ послѣдней цифрой справа значекъ X, потому что VI + IV = X. Результатъ можно прочитать такъ: 79979555 десятаго порядка (десятыхъ скрупуловъ, по выраженію Бейера). Для дѣленія дается такое правило: сдѣлай такъ, чтобы въ дѣлимомъ было столько же знаковъ, сколько и въ дѣлителѣ, или даже больше: если въ дѣлимомъ мало знаковъ, то припиши столько нулей, сколько тебѣ нужно, и это не измѣнитъ величины дроби. Потомъ произведи дѣленіе, какъ будто бы это были цѣлыя числа, и у послѣдняго разряда отвѣта поставь справа такой значекъ, который бы равнялся разности значковъ дѣлимаго и дѣлителя. Если при дѣленіи получится остатокъ, и если надо частное найти точнѣе, то можно приписывать къ дѣлимому нуль за нулемъ, сколько угодно разъ, и въ результатѣ получатся разряды, которыхъ номеръ постепенно понижается на единицу. Въ концѣ своей брошюры Бейеръ говоритъ подробно о томъ, какъ изъ десятичныхъ дробей можно получить шестидесятеричныя, и наоборотъ; также о томъ, какъ примѣнять десятичныя дроби къ рѣшенію задачъ.

Скоро и англійскій авторъ І. Непиръ (Nepper) спѣшитъ подѣлиться съ своими читателями свѣдѣніями о новыхъ дробяхъ. Въ его книжкѣ (1626 г.) дробь пишется такъ: $28^{\circ}\ 6'\ 7''\ 5'''$ и читается такъ: 28 цѣлыхъ 6 примъ 7 секундъ 5 терцій. Кромѣ того, разряды иногда у него раздѣляются точками: $27^{\circ} : 0' : 5''$ и т. п. Сложеніе и вычитаніе идетъ у него обыкновенным порядкомъ, такъ же, какъ и у насъ: вотъ примѣръ сложенія:

$$\begin{array}{rrrr} 28^{\circ} & 6' & 7'' & 5''' \\ 27 & 0 & 5 & \\ 0 & 7 & 3 & \\ \hline 56 & 4 & 5 & 5 \end{array}$$

При умноженіи не считается необходимымъ, чтобы цифры одинаковыхъ разрядовъ стояли другъ подъ другомъ: надо умножать такъ, какъ будто бы это были все цѣлыя числа, и потомъ слѣдуетъ отсчитать съ правой стороны столько разрядовъ, сколько ихъ вмѣстѣ въ обоихъ производителяхъ: это будутъ скрупулы — десятичныя доли. Примѣры:

$$
\begin{array}{r}
456\ 7' \\
58\ 5'' \\
\hline
2283\ 5 \\
36536 \\
22835 \\
\hline
26716'\ 9''\ 5'''
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
4^{0}\ 0'\ 6'' \\
0\ \ 0\ \ 3'' \\
\hline
1\ \ 2\ \ 1\ \ 8 \\
0\ \ 0\ \ 0 \\
0\ \ 0\ \ 0 \\
\hline
0,\ 1\ \ 2\ \ 1\ \ 8^{IV}
\end{array}
$$

Въ первомъ примѣрѣ множимое раздроблено въ десятыя доли, множитель въ сотыя, произведеніе поэтому содержитъ 2671 цѣлую единицу, 6 десятыхъ, 9 сотыхъ и 5 тысячныхъ. Во второмъ примѣрѣ мы видимъ запятую между цѣлыми и десятыми. Введеніе ея приписывается извѣстному астроному Кеплеру (1571—1630).

Правило дѣленія слѣдующее: дѣлить надо, какъ цѣлыя числа, и кромѣ того надо вычесть изъ значка дѣлимаго значекъ дѣлителя, тогда остатокъ опредѣлитъ собою значекъ частнаго. Примѣръ: раздѣлить 5' 7'' на 8° 6' 5'' 6'''. Рѣшеніе:

$$
\begin{array}{l}
57000\ (6'\ 5''\ 8^{IV} \\
\ \ 8656 \\
51936 \\
50640 \\
43280 \\
\ \ \ 73600 \\
\ \ \ 69248 \\
\ \ \ \ \ 4352
\end{array}
$$

Въ ариѳметикѣ Беклера (1661) десятичныя дроби примѣняются только къ мѣрамъ длины, поверхности и объема: поэтому имъ дается названіе геометрическихъ долей. Цѣлыя отдѣляются отъ долей запятой или черточкой; кромѣ того, употребляются еще отмѣтки: для сажени 0, для фута 1, для дюйма 2 и для линіи 3; у послѣдней доли ставится значекъ, который опредѣляетъ ея разрядъ, и т. д.

ляется этотъ значекъ скобкой. Примѣръ: 123, 6543 (4; это значитъ 123 сажени, 6 футовъ, 5 дюймовъ, 4 линіи и 3 точки. Какъ видно, Беклеръ проэктируетъ ввести десятичную зависимость между мѣрами, т.-е. считать въ сажени 10 футовъ, въ футѣ 10 дюймовъ и т. д. Сочиненіе англичанина Вингата (1668) еще болѣе приблизило теорію десятичныхъ дробей къ тому виду, какой она имѣетъ сейчасъ. Онъ примѣняетъ дроби къ тригонометріи, къ вычисленію сложныхъ процентовъ и къ дѣйствіямъ съ именованными числами. Онъ хорошо видитъ всю громадную пользу, которая получилась бы для науки, если бы всѣ мѣры были приведены къ десятичной системѣ, иначе сказать всякая мѣра содержала бы въ себѣ ровно 10 слѣдующихъ низшихъ. Разряды десятичныхъ дробей идутъ, по мнѣнію Вингата, такъ же безпредѣльно, какъ и разряды цѣлыхъ чиселъ, такъ что за десятыми долями, сотыми, тысячными идутъ десятитысячныя, стотысячныя, милліонныя и т. д. до безконечности. Знаменателя десятичной дроби вполнѣ возможно не писать, если только условиться отдѣлять цѣлое число отъ десятыхъ долей точкой или запятой. Вингатъ пишетъ по нашему 285, 82 или 285. 82, но у него вмѣсто 0,5 встрѣчается .5 и вмѣсто 0,25 пишется .25, слѣд., цѣлыхъ онъ въ этомъ случаѣ не пишетъ. Три первыхъ дѣйствія онъ проходитъ совершенно аналогично съ нами, а для дѣленія у него взятъ такой порядокъ: къ дѣлимому можно приписать сколько угодно нулей и потомъ произвести дѣйствіе такъ, какъ если бы это были цѣлыя числа: чтобы опредѣлить значеніе первой цифры частнаго, по которой уже можно разсчитать и всѣ остальные разряды, стоитъ только подписать дѣлителя подъ тѣми же разрядами дѣлимаго, которые были отчеркнуты для перваго дѣленія; подъ какимъ разрядомъ дѣлимаго находятся единицы дѣлителя, таковъ и будетъ высшій разрядъ частнаго. Примѣръ: 2,34 : 52,125. Дѣлимъ 23400000 на 52125 и получаемъ 448. Теперь подписываемъ 52,125 подъ 2,34 такъ, чтобы дѣлитель стоялъ подъ тѣмъ числомъ, которое на него дѣлилось въ первый разъ, именно $\begin{matrix} 2,34000 \\ 52,125 \end{matrix}$ и такъ какъ единицы дѣлителя оказались подъ сотыми долями дѣлимаго, то первая цифра частнаго 448, т.-е. 4, выражаетъ собой сотыя доли и, слѣд., результатъ дѣйствія долженъ быть такой: 0. 0448. Иногда нужно бываетъ при этомъ спосебѣ приписать съ лѣвой стороны дѣлимаго нѣсколько нулей, потому что иначе дѣлитель не можетъ помѣститься подъ дѣлимымъ. Примѣръ—0,0758 : 0,000064, тогда для удобства мы напишемъ такъ: 0000,0758 и выведемъ изъ этого, что

0,000064

высшій разрядъ частнаго составитъ тысячи, такъ какъ единицы дѣлителя оказались подъ тысячами дѣлимаго. И дѣйствительно, если произвести вычисленіе, то получится въ отвѣтѣ 1184,375.

Если сопоставить всѣ способы, какими писались десятичныя дроби въ математ. работахъ XVII вѣка, то получится всего пять видоизмѣненій. и если по нашему пишется 0, 784, то у Бейера $\overset{\text{iii}}{784}$, у Непира 0°7′8″4‴, у Виэта .784, у Беклера 784 (3 и у Валлиса 0<.784.

Мы разсмотрѣли до сихъ поръ, кѣмъ и какъ было положено начало десятичнымъ дробямъ, и какіе успѣхи онѣ сдѣлали въ XVII столѣтіи. Въ слѣдующемъ вѣкѣ, въ XVIII-мъ, шестидесятеричныя дроби мало по малу исчезаютъ, и ихъ мѣсто занимаютъ десятичныя дроби. Напр., въ ариѳметикѣ нѣмецкаго педагога Паришіуса, въ первомъ изданіи, которое вышло въ 1706 году, разсматриваются дроби шестидесятеричныя, но во второмъ изданіи этой же ариѳметики онѣ уже замѣнены десятичными. Впрочемъ Паришіусъ, подобно Беклеру, примѣняетъ десятичныя дроби только къ мѣрамъ длины. Самое трудное изъ дѣйствій — дѣленіе онъ производитъ по такому правилу: надо дѣлить, какъ цѣлыя числа, а чтобы узнать номеръ разряда частнаго, надо изъ номера дѣлимаго вычесть номеръ дѣлителя. Вотъ примѣръ. 4269342 (5 : 321 (2 (согласно нашему обозначенію это было бы 42,69342 : 3,21).

```
  19
 1056      (5
4269342   (13 300 (3
3211111      (2
 32222
  333
```

При такомъ пріемѣ получается въ отвѣтѣ двѣ дроби: десятичная 3 и обыкновенная $\frac{42}{321}$, такъ какъ въ остаткѣ получилось 42.

Чтобы частное состояло только изъ одной десятичной дроби, Парпціусъ совѣтуетъ приписывать къ дѣлимому постепенно нули, до тѣхъ поръ, пока, наконецъ, дѣленіе не выйдетъ безъ остатка. Если же оно безъ остатка никакъ не выходитъ, то Парпціусъ рекомендуетъ совсѣмъ бросить небольшой остатокъ, по латинской пословицѣ «minima non curat praetor», т.-е. «о пустякахъ не стоитъ толковать».

Періодическія дроби принадлежатъ уже 19-му вѣку.

Непрерывныя дроби.

Еще у египтянъ встрѣчаемъ мы дроби, у которыхъ числитель не цѣлое число: онъ самъ представляетъ изъ себя дробь, напр. $\frac{2\frac{1}{3}}{8}$, это значитъ 2 восьмушки и еще сверхъ того треть восьмушки. Также и у римлянъ нерѣдко можно было встрѣтить $\frac{1\frac{1}{2}}{12}$ унціи, т.-е. 1 двѣнадцатую и еще $\frac{1}{2}$ двѣнадцатой, т.-е. всего $\frac{3}{24}$. Такимъ образомъ и въ древнемъ мірѣ идея непрерывныхъ дробей была ясна и доступна: дроби эти основаны на томъ, что числителемъ можетъ быть не *только цѣлое число, но и смѣшанное.*

Греческій математикъ Архимедъ примѣнялъ непрерывныя дроби къ извлеченію квадратныхъ корней и выражалъ этими дробями приближенныя величины корней. Арабскій ученый Алькальцади (въ XV в. по Р. Х.) даетъ нѣкоторые намеки на восходящія непрерывныя дроби; онъ примѣняетъ ихъ къ дѣленію съ остаткомъ и обозначаетъ ими дробное частное. Напр., требуется раздѣлить 253 на 280, и такъ какъ 280 разлагается на производителей 5, 7 и 8, то мы сперва дѣлимъ 253 на 8, будетъ $31\frac{5}{8}$, потомъ полученное дѣлимъ на 7, будетъ $4\frac{3\frac{5}{8}}{7}$ и, наконецъ, дѣлимъ на 5, будетъ $\frac{4\frac{3\frac{5}{8}}{7}}{5}$, а это, обыкновенно, представляется такъ: $\frac{4+\frac{3+\frac{5}{8}}{7}}{5}$ и составляетъ восходящую непрерывную дробь. Нисходящею же дробью была бы такая:

$\frac{4}{5+\frac{3}{7+\frac{5}{8}}}$ или, если написать ее яснѣе, то $\cfrac{4}{5+\cfrac{3}{7+\cfrac{5}{8}}}$; вычислить ее можно такъ: $7+\frac{5}{8}=\frac{61}{8}$; $3:\frac{61}{8}=\frac{24}{61}$; $5+\frac{24}{61}=\frac{329}{61}$; $4:\frac{329}{61}=\frac{244}{329}$.

Лордъ Брункеръ, англичанинъ, представилъ (въ 1655 г.) въ видѣ непрерывной дроби величину $\frac{\Pi}{4}=0,78539316...$ (Π показываетъ отношеніе длины окружности къ длинѣ ея діаметра). Гюйгенсъ въ 1682 году далъ подробное объясненіе того, какъ съ помощью непрерывныхъ дробей можно приводить къ легкимъ числамъ трудныя несократимыя дроби. Полную теорію непрерывныхъ дробей далъ Леонгардъ Эйлеръ, нѣмецкій ученый 18 в.

Пропорціи, прогрессіи и извлеченіе корней.

Не только въ одной ариѳметикѣ, но и почти во всѣхъ другихъ наукахъ идетъ постоянная разработка вопроса, что должно служить ихъ содержаніемъ, и изъ чего долженъ слагаться ихъ матеріалъ. Въ зависимости отъ способовъ изслѣдованія и отъ пріемовъ обученія содержаніе учебнаго предмета то увеличивается, то уменьшается, то замѣняется другимъ. Ариѳметика не мало за свою многовѣковую жизнь потерпѣла измѣненій. Началась она съ вычисленій надъ цѣлыми числами, потомъ къ ней присоединились дроби и именованныя числа, затѣмъ рядъ другихъ отдѣловъ и среди нихъ пропорціи, прогрессіи и извлеченіе корней. Поговоримъ о нихъ въ отдѣльности.

Пропорціи первоначально разрабатывались въ геометріи и занимали въ ней видное мѣсто, онѣ примѣнялись къ подобію фигуръ; и такъ какъ геометрія составляла любимый предметъ греческихъ математиковъ, то естественно вышло, что разработка пропорцій является заслугой греческихъ ученыхъ. Знаменитѣйшій геометръ Эвклидъ (III ст. до Р. Х.), система котораго вдохновляла всѣхъ позднѣйшихъ геометровъ, и европейскихъ и азіатскихъ, и труды котораго считаются классическими и незамѣнимыми по настоящее время, далъ среди другихъ искусно разработанныхъ отдѣловъ отдѣлъ о пропорціяхъ. Вліяніе Эвклида на послѣдующія поколѣнія было громадно, и оно даетъ себя чувствовать и теперь, поэтому то направленіе, которое придалъ пропорціямъ Эвклидъ, преобладаетъ и теперь въ большинствѣ учебниковъ. Вкратцѣ по отношенію къ ариѳметикѣ его можно охарактеризовать тѣмъ, что пропорціямъ отводится въ ариѳметикѣ болѣе высокое мѣсто, чѣмъ онѣ заслуживаютъ, и на нихъ болѣе обращаютъ вниманія, чѣмъ это должно было бы вызываться содержаніемъ ариѳметики и ея цѣлями. Всякій, кто проходилъ ариѳметику въ школѣ и изучалъ пропорціи, вспомнитъ навѣрное, что этотъ отдѣлъ вызывалъ въ немъ недоумѣніе, казался какимъ-то чуждымъ и даже труднымъ. И дѣйствительно, пропорціи надо бы, по настоящему, исключить изъ курса элементарной ариѳметики и ввести въ составъ *буквенной, общей ариѳметики, т.-е. теоріи чиселъ. Пропорціи не учатъ* вычисленіямъ, которыя одни только и составляютъ матеріалъ элементарной ариѳметики, но онѣ излагаютъ нѣкоторыя общія свойства, которыя, въ силу своей общности, подлежатъ ариѳметикѣ не вычисляющей, а обобщающей, т.-е. теоріи чиселъ и алгебрѣ: тамъ ихъ естественное и законное мѣсто. Надо пожелать, чтобы глава о пропорціяхъ была исключена изъ ариѳметическаго курса средней школы. Въ геометріи она необходима, тамъ она пусть останется, и пусть геометрическое ученіе о пропорціяхъ послужитъ началомъ для алгебраическаго, какъ болѣе наглядное должно служить фундаментомъ для отвлеченнаго. Напрасно думаютъ иные, что пропорціи нужны для задачъ на тройное правило, на правило процентовъ и т. д. Всѣ эти задачи могутъ прекрасно обойтись безъ пропорцій и рѣшаться приведеніемъ къ единицѣ, а еще лучше различными искусственными упрощающими пріемами, которые скорѣе ведутъ къ цѣли и могутъ болѣе изощрить мышленіе учениковъ. Практическая жизнь сильно суживаетъ примѣненіе пропорцій, сравнительно съ тѣмъ, какое имъ дается въ ариѳметикѣ. Напр., бываютъ въ ариѳметикѣ задачи: «1 арш. стоитъ 2 руб. Сколько стоятъ 1000 аршинъ»? Всякій торговый человѣкъ, даже неучившійся ариѳметикѣ, знаетъ, что при большихъ партіяхъ товара обязательно дѣлается уступка и слѣд. 1000 арш. обойдутся не въ 2000 руб., а нѣсколько дешевле. Подобныхъ задачъ, гдѣ расходится ариѳметическая точность съ житейской практикой, можно привести массу, и поэтому не удивительно, если при нѣкоторой неосторожности ученики вмѣсто полезныхъ выводовъ получаютъ отъ пропорцій нѣчто сумбурное и несообразное, доходящее даже до извѣстныхъ курьезовъ, вродѣ: «одинъ человѣкъ пройдетъ весь путь во столько-то времени, сколько времени потребуется, если пойдутъ вмѣстѣ 2 человѣка». Мы, конечно, смѣемся надъ несообразительностью маленькаго ученика, но мы несправедливы, когда объясняемъ нелѣпый отвѣтъ только тупостью ученика; нѣтъ, виноваты и мы, потому что заставляемъ изучать въ ариѳметикѣ отдѣлъ чуждый, отвлеченный, не вытекающій изъ предыдущихъ отдѣловъ.

Прогрессіи. Прогрессіей, какъ извѣстно, называется рядъ чиселъ, расположенныхъ въ опредѣленномъ порядкѣ уменьшенія или увеличенія. Напр., рядъ 2, 4, 6, 8, 10, и т. д. составляетъ прогрессію, потому что входящія въ него числа все увеличиваются на 2; точно также прогрессіей будетъ называться и рядъ такой: 4, 2, 1, $1/2$, $1/4$, $1/8$, $1/16$, и такъ далѣе, потому что помѣщенныя здѣсь числа постепенно все уменьшаются вдвое. Въ старинныхъ учебникахъ ариѳметики прогрессіи считались необходимой главой и помѣщались въ нихъ всегда, и это было до средины прошлаго XIX-го вѣка. При этомъ, изложеніе часто отличалось неясностью и сбивчивостью, такъ что, напр., прогрессія смѣшивалась съ пропорціей, какъ у Магницкаго на стр. ρδφ. «Что есть прогрессіо: Прогрессіо есть пропорціо, или подобенство числъ къ числамъ въ примноженіи или во уменьшеніи яковыхъ либо перечневъ и раздѣляется на три вида, иже суть: ариѳметическое, геометрическое и армоническое. О армоническомъ или мусикійскомъ нѣсть треба намъ глаголати. Во ариѳметическомъ прогрессіи въ примножительномъ егда къ первому числу приложиши разнство тогда исполнится другое, егда же ко другому числу тожде разнство приложиши, тогда будетъ третіе число. А во умалительномъ прогрессіи аще вычтеши разнство отъ перваго числа останется другое, а отъ другаго третье и прочая». И т. далѣе.

Въ иныхъ старинныхъ ариѳметикахъ къ прогрессіямъ еще присоединялось вычисленіе рядовъ. Такъ, напр., арабскій математикъ Алькархи (въ XI в. по Р. Хрис.) далъ правило, какъ вычислять сумму кубовъ ряда послѣдовательныхъ чиселъ, начиная съ единицы.

Примѣры на правило Алькархи можно привести такіе:

$$1^3+2^3+3^3=(1+2+3)^2, \text{ такъ какъ } 1+8+27=6\times6$$

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3=(1+2+3+4+5)^2, \text{ такъ какъ }$$
$$1+8+27+64+125=15\times15$$

и т. д.

Въ настоящее время прогрессіи и ряды не встрѣчаются въ учебникахъ ариѳметики и не входятъ въ школьную программу по этому предмету. Теперь признано, что для полнаго объясненія этихъ отдѣловъ нужна общая количественная наука, а не частная, числовая, т.-е. не ариѳметика, а алгебра.

Извлеченіе корней до самаго послѣдняго времени входило въ составъ ариѳметики и содержалось даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ 60-хъ годовъ прошлаго столѣтія, напр., въ задачникѣ, изданномъ департаментомъ народнаго просвѣщенія, имѣлись задачи на квадратные и кубическіе корни. Этотъ отдѣлъ, дѣйствительно, вполнѣ числовой, и процессъ извлеченія корня очень подходилъ бы къ курсу ариѳметики, но только въ томъ бѣда, что трудно провести хорошее объясненіе этого дѣйствія безъ помощи алгебры, поэтому теперь извлеченіе корней признается обыкновенно частью алгебры.

Умѣли извлекать корни индусскіе и арабскіе математики, также и греческіе ученые. Индусамъ и арабамъ были извѣстны начала алгебры и даже въ такой мѣрѣ, что они могли рѣшать квадратныя уравненія. Поэтому вполнѣ слѣдовало ожидать того, что уже въ XII в. по Р. Х. извлеченіе корней шло почти такъ же, какъ идетъ оно сейчасъ у насъ.

Тройное правило.

Нѣтъ такого достаточно сильнаго выраженія, на которое поскупились бы составители средневѣковыхъ ариѳметикъ, чтобы похвалить тройное правило. «Та строка тройная похвальная и лучшая строка изо всѣхъ иныхъ строкъ.» «Ее философы зовутъ золотою строкою» Въ нѣмецкихъ учебникахъ объ немъ отзывались, какъ о такомъ, которое «выше всякихъ похвалъ» оно—«ключъ купцовъ». Такъ же и у французовъ оно слыло подъ именемъ règle dorée—золотого правила. Оно противополагалось цѣлой наукѣ—алгебрѣ.

За что же воздаются такія неумѣренныя похвалы отдѣлу, который въ наше время привыкъ занимать уже болѣе скромное мѣсто? Выяснить это очень интересно, и мы позволяемъ себѣ вернуться немного назадъ и дать краткую характеристику цѣлей, которыя преслѣдовала ариѳметика съ древнихъ временъ.

Всякая наука въ первоначальной стадіи своего развитія вызывается практическими потребностями и стремится, въ свою очередь, имъ удовлетворить. Затѣмъ, въ зависимости отъ условій, при которыхъ она развивается, наука иногда довольно скоро, иногда болѣе медленно принимаетъ теоретическую окраску и на изучающихъ ее дѣйствуетъ образовательно, т.-е. совершенствуетъ ихъ душевныя способности: умъ, чувство и волю: при медленномъ же ростѣ наука долго остается руководительницей мастерства, сообщаетъ одно только умѣнье, даетъ человѣку механическіе навыки и придаетъ ему черты машинальности. И то и другое направленіе испытала ариѳметика. Съ одной стороны греческіе ученые видѣли въ ариѳметикѣ болѣе всего образовательный элементъ; они постоянно ставили вопросы «почему?» и «зачѣмъ?», всегда искали основанія и вывода; ученики греческихъ школъ углублялись въ суть науки, думали надъ ней, и потому изученіе дѣйствовало на нихъ образовательно-развивающимъ образомъ. Съ другой стороны индусы смотрѣли на ариѳметику скорѣе со стороны искусства, они не любили вопроса «почему?», но у нихъ основнымъ вопросомъ всегда былъ: «какъ это сдѣлать?» Направленіе индусовъ перешло къ арабамъ, а оттуда въ средневѣковую Европу. Въ ней оно встрѣтило чрезвычайно радушный пріемъ, и почва для него оказывалась вполнѣ благодарной: послѣ великаго переселенія народовъ и при безпрерывно продолжающихся войнахъ нечего было и думать о развитіи точной, чистой, отвлеченной науки, а въ пору было ограничиться ея прикладной частью, достаточно было только учить «какъ дѣлать», а не «почему такъ дѣлать». И вотъ практическая окраска осталась за ариѳметикой на долгое время, почти до нашихъ дней, и вмѣстѣ съ тѣмъ изученіе ея было узко-механическимъ: безъ выводовъ, разъясненій, безъ углубленія въ основанія; повсюду въ учебникахъ встрѣчалось «такъ дѣлай», «дѣлать надо такъ» и ученику оставалось только затверживать и примѣнять къ дѣлу; у нашего Магницкаго тоже встрѣчается рядъ характерныхъ выраженій «зри сице». «зри изобрѣтенія»; положимъ, среди этихъ выраженій у него есть «умствуй и придетъ», но какъ именно умствовать, на то дается очень мало намековъ. Сообразно практическому значенію ариѳметики, въ ней особенно выдѣлялось и цѣнилось все, что можетъ принести непосредственную выгоду, доставить заработокъ. «Хто сію мудрость знаетъ», говорится въ русской ариѳметикѣ XVII вѣка, «можетъ быть у государя въ великой чти и въ жалованьи: по сей мудрости гости по государствамъ торгуютъ и во всякихъ товарѣхъ и торгѣхъ силу знаютъ и во всякихъ вѣсѣхъ и мѣрахъ и въ земномъ верстаніи и въ морскомъ теченіи зѣло искусни, и счетъ изъ всякаго числа перечню знаютъ».

Но какая же часть ариѳметики можетъ болѣе дать практическихъ, непосредственно приложимыхъ навыковъ, какъ не рѣшеніе задачъ? Поэтому всѣ старанія средневѣковыхъ авторовъ направлялись къ тому, чтобы собрать какъ можно больше задачъ и при томъ самаго разнообразнаго житейскаго содержанія. Тутъ были задачи и о продажѣ, и о покупкѣ, о векселяхъ и о процентахъ, о смѣшеніи, объ обмѣнѣ; пестрота была ужасная и разобраться во всей массѣ задачъ не представлялось никакой возможности. Чтобы хоть нѣсколько сгруппировать и ввести нѣкоторую систему и порядокъ, пытались распредѣлить всѣ задачи по отдѣламъ или типамъ. Это мысль, конечно, хорошая, но выполнялась она, обыкновенно, очень неудачно, и задачи распредѣлялись не по способамъ ихъ рѣшенія, какъ-бы слѣдовало, а по ихъ содержанію, т. е. по внѣшнему виду; напр., былъ особый видъ задачъ о собакахъ, догоняющихъ зайца, о деревьяхъ, о дѣвицахъ и т. п.

Рѣшеніе задачъ по ихъ содержанію не приносило почти никакой пользы, потому-что нисколько не помогало тому, чтобы лучше понимать рѣшеніе. Да и понимать-то, по мнѣнію старинныхъ авторовъ, едва-ли нужно было. «Это ничего», утѣшаетъ бывало наставникъ своихъ питомцевъ: «что ты ничего не понимаешь, ты и впереди также многаго не будешь понимать». Вмѣсто пониманія рекомендовалось не заноситься, а выучивать наизусть все, что задаютъ, и потомъ стараться примѣнять это къ дѣлу, т. е. къ примѣрамъ, и вся сила пониманія сосредоточивалась не на томъ, чтобы уяснить выводъ правила, а на болѣе скромномъ—на томъ, какъ примѣнить общее правило къ примѣрамъ.

И вотъ тройное правило являлось выдающимся и заслуживающимъ особеннаго вниманія во многихъ отношеніяхъ. Во-первыхъ, кругъ его задачъ довольно обширенъ, во-вторыхъ, самое правило выражается довольно просто и ясно, и въ-третьихъ, примѣнить это правило было сравнительно нетрудно. За всѣ эти достоинства ему и дали названіе «золотого», «ключа купцовъ» и т. п.

Тройное правило получило начало у индусовъ, тамъ его задачи рѣшались большею частію приведеніемъ къ единицѣ. Арабскій ученый Альхваризми (IX в. по Р. Х.) относилъ его къ алгебрѣ. Леонардо Фибонначи, итальянецъ XIII в. по Р. Х., посвящаетъ тройному правилу особый отдѣлъ подъ названіемъ: ad majorem guisam, гдѣ даются задачи на вычисленіе стоимости товаровъ. Примѣръ: 100) rotuli (пизанскій вѣсъ) стоятъ 40 лиръ, что стоятъ 5 rotuli? Условіе записывалось такъ:

$$40\ L \qquad 100\ R$$

$$5\ R$$

Правило предписывало рѣшать эту задачу слѣдующимъ порядкомъ: *произведеніе 40 на 5 дѣлить на 100.*

Особенное вниманіе стали удѣлять тройному правилу съ XVI-го вѣка, т. е. съ тѣхъ поръ, какъ европейская торговля и промышленность сразу двинулась впередъ, благодаря важнымъ изобрѣтеніямъ и открытію новыхъ странъ. Но это не мѣшало разрабатывать эту главу совершенно неудовлетворительно, по крайней мѣрѣ, съ нашей точки зрѣнія. Прежде всего опредѣлялось правило чисто внѣшнимъ образомъ «задача состоитъ изъ трехъ чиселъ и даетъ собою четвертое число подобно тому, какъ если поставить три угла дома, то этимъ самымъ ужъ опредѣлится 4-й уголъ: второе число надо умножить на 3-е, и что получится, то раздѣлить на 1-е число». Такое опредѣленіе не могло не вести къ сбивчивости, и прежде всего являлся вопросъ: что считать первымъ числомъ, и всякія ли задачи съ тремя данными числами можно рѣшать тройнымъ правиломъ? Разъяснять это недоразумѣніе учебники не считали нужнымъ. Кромѣ того, рѣшались задачи не только съ цѣлыми числами, но и съ дробями, и въ иныхъ ариѳметикахъ онѣ располагались такъ непослѣдовательно, что задачи съ дробными числами на тройное правило помѣщались раньше главы о дробяхъ, потому-что и все тройное правило шло раньше ариѳметики дробныхъ чиселъ.

Послѣ тройного правила съ цѣлыми числами и дробями излагалось особое правило «сократительное», въ которомъ разъяснялось, какъ можно сокращать нѣкоторыя данныя числа, а потомъ уже шло правило «возвратительное»: это былъ очень сбивчивый отдѣлъ, къ которому принадлежали вопросы съ обратной пропорціональностью, и авторамъ учебниковъ никакъ не удавалось разграничить, какія задачи относятся къ этой группѣ; ученикамъ приходилось полагаться на свою собственную догадку и довольствоваться смекалкой. Въ XV и XVI вв., объясненіе давалось вродѣ слѣдующаго: «Если мѣра зерна стоитъ $1^1/_2$ марки, то на 1 марку даютъ два пуда хлѣба; сколько пудовъ хлѣба дадутъ на марку, если мѣра зерна стоитъ $1^3/_4$ марки; рѣшаемъ тройнымъ правиломъ, получится $\frac{2 \cdot 1^3/_4}{1^1/_2} = 2^1/_3$; но понятливый смекнетъ, что когда зерно вздорожаетъ, то хлѣба будутъ давать меньше, а не больше, поэтому вопросъ надо перевернуть, будетъ $\frac{2 \cdot 1^1/_2}{1^3/_4} = 1^5/_7$.» *Въ подобномъ духѣ трактуетъ и Магницкій (1703 г.)* «*Правило возвра*тительное есть, егда потреба бываетъ въ заданіи третій перечень поставляти вмѣсто перваго: потребно же сіе въ гражданскихъ частыхъ случаяхъ, якоже рещи на прикладъ: нѣкій господинъ призвалъ плотника и велѣлъ дворъ строити, давъ ему двадцать человѣкъ работниковъ: и спросилъ, въ колико дней построитъ той его дворъ; онъ-же отвѣща, въ тридцать дней; а господину надобно въ 5 дней построити весь, и ради того спросилъ паки плотника, колико человѣкъ достоитъ ти имѣти, дабы съ ними ты построилъ дворъ въ 5 дней, и той плотникъ недоумѣяся вопрошаетъ тя ариѳметиче: колико человѣкъ ему достоитъ имѣти, чтобъ построить ему той дворъ въ 5 дней, и аще ты начнеши творити по чину тройного правила просто; то воистину погрѣшиши: но подобаетъ ти не тако: 30 — 20 — 5, но сице превративъ: 5 — 20 — 30: $30 \times 20 = 600$; $600 : 5 = 120$».

За тройнымъ правиломъ шло пятерное, за нимъ семерное. Легко догадаться, что это частные случаи сложнаго тройного правила, именно когда по 5 или 7 даннымъ, находящимся между собою въ пропорціональной зависимости, отыскивается 6-е или 8-е, имъ соотвѣтствующее число, иначе сказать: пятерное правило требуетъ 2-хъ пропорцій, а семерное трехъ. Пятерное правило объяснялось въ XVIII вѣкѣ такъ: «имъ производятся такія вычисленія, которыхъ нельзя произвести по другому правилу: въ немъ дается 5 чиселъ, и по нимъ отыскивается шестое искомое число; напр., нѣкто пустилъ въ оборотъ сто рублей, и они принесли ему прибыли 7 р., спрашивается, сколько прибыли онъ получилъ бы съ 100 р. на 5 лѣтъ; рѣшается такъ: 100—1—7—1000—5, перемножь два лѣвыхъ числа, а также перемножь 3 правыхъ числа и послѣднее произведеніе раздѣли на первое, будетъ въ отвѣтѣ 350, столько рублей прибыли дастъ 1000 р. въ теченіе 5 лѣтъ.

Простое и сложное тройное правило распредѣлялись обыкновенно въ XVI—XVIII вв. на массу мелкихъ отдѣловъ, которые носили очень замысловатыя названія, въ зависимости отъ содержанія задачъ. Вотъ эти названія по Магницкому: a «тройное торговое правило», т. е. вычисленіе стоимости купленнаго товара; b «тройное торговое о купляхъ и продажахъ»,—то-же, что и предыдущее, но только посложнѣе; c «тройное торговое въ товарныхъ овощахъ и съ вывѣскою», когда приходится дѣлать вычетъ за посуду и вообще оболочку; d «о прибыли и убыткѣ»; e «статья вопросная въ тройномъ правилѣ», въ ней задачи очень разнообразнаго содержанія, по большей части съ обратной пропорціональностью; f «статья вопросная со временемъ», гдѣ спрашивается высчитать продолжительность работы, пути и т. п.

Въ началѣ XIX-го вѣка было предложено Базедовымъ еще измѣненіе въ тройномъ правилѣ и опять въ ту-же самую сторону машинальнаго, безсознательнаго навыка. Этотъ нѣмецкій педагогъ задался цѣлью еще болѣе упростить рѣшеніе задачъ на тройное правило тѣмъ, что еще сильнѣе уменьшить разсужденіе при ихъ рѣшеніи и замѣнить его письмомъ готовой формулы. Онъ совѣтуетъ располагать данныя числа 2 столбцами: въ лѣвомъ пишется неизвѣстное количество и всѣ тѣ числа, которыя должны войти въ числителя формулы, а въ правомъ — всѣ множители, составляющіе знаменателя. Примѣръ: для продовольствія 1200 человѣкъ въ теченіе 4 мѣсяцевъ требуется 2400 центнеровъ муки: на сколько человѣкъ 4000 центнеровъ выйдетъ въ 3 мѣсяца? Пишемъ 2 столбца: ? — 1200

$$\begin{array}{rcl} ? & — & 1200 \\ 2400 & — & 4000 \\ 3 & — & 4 \end{array}$$

и получаемъ формулу отвѣта: $\frac{1200 \cdot 4000 \cdot 4}{2400 \cdot 3}$. Почему числа 1200, 4000 и 4 вошли въ числителя, а 2400 и 3—въ знаменателя? На это можно отвѣтить такимъ правиломъ: въ числителя входитъ число, однородное съ искомымъ, т. е. въ нашемъ случаѣ число 1200; кромѣ того въ него-же входятъ всѣ тѣ числа второго условія (4000 . 4), которыя прямо пропорціональны искомому; если-же они обратно пропорціональны, какъ въ нашемъ примѣрѣ 3, то они замѣняются соотвѣтствующими числами 1-го условія (4-мя).

Вотъ все, что мы можемъ сообщить объ историческомъ развитіи тройного правила. Изъ всего сказаннаго можно сдѣлать заключеніе, которое годится для нашего времени. Средневѣковая ариѳметика, съ ея стремленіемъ давать только правила и пропускать выводы, съ ея механическимъ рѣшеніемъ вопросовъ, имѣла слишкомъ большое вліяніе на всю послѣдующую школьную жизнь, и настолько большое, что слѣды его проявляются на каждомъ шагу и въ наше время. Какъ бы мы ни старались отряхнуться отъ традиціи, освободиться отъ привычки, но онѣ слишкомъ тѣсно насъ охватили и слишкомъ крѣпко къ намъ приклеились, чтобы ихъ можно было отбросить безъ остатка. Наша школа все еще повинна въ механическомъ заучиваніи ариѳметики, безъ достаточнаго участія сознательности. Тройное правило служитъ хорошимъ доказательствомъ этого. Нерѣдко забываетъ наша средняя и низшая школа, что она призвана давать общее образованіе, а не готовить бухгалтеровъ, конторщиковъ, счетоводовъ и т. п. Между тѣмъ ремесленные пріемы итальянцевъ и нѣмцевъ, стремившихся не развить человѣка, а сдѣлать изъ него счетную машину, примѣняются нерѣдко и теперь. Къ чему всѣ эти правила: тройное, смѣшенія и т. д.? Какой цѣли они должны удовлетворять? Они должны являться выводомъ изъ рѣшенныхъ задачъ, а не предшествовать рѣшенію задачъ; вредно рѣшать задачи по предварительно усвоенному правилу, но надо стараться доходить до отвѣта свободнымъ личнымъ соображеніемъ. Однимъ словомъ, правило не надо понимать въ видѣ рецепта, который достаточно запомнить, чтобы по нему приготовлять разныя мудреныя рѣшенія, но имъ слѣдуетъ дорожить только какъ выводомъ, къ которому приходитъ ученикъ: если ученикъ не можетъ сдѣлать этого вывода, то это значитъ, что задачъ взято мало, или онѣ расположены не систематично, и эту ошибку надо поправить болѣе систематическимъ расположеніемъ задачъ; если ученикъ дѣлаетъ не такой полный и обстоятельный выводъ, какой хотѣлось бы учителю, то лучше удовольствоваться имъ, чѣмъ заставлять разучивать правило, навязанное учебникомъ: оно скоро забудется и не окажетъ развивающаго дѣйствія, такъ какъ необходимымъ качествомъ математическаго вывода должна быть самостоятельность, а необходимымъ условіемъ сознательности должно быть тѣсное связываніе всѣхъ частей курса, почему и не можетъ имѣть мѣста механическое вкладываніе въ голову отдѣльныхъ кусковъ, усвояемыхъ памятью.

Правило пропорціональнаго дѣленія.

Пропорціональное дѣленіе съ давнихъ временъ прилагалось тогда когда требовалось раздѣлить завѣщанный капиталъ между наслѣдниками. Поэтому въ сборникахъ, обыкновенно, помѣщалось нѣсколько задачъ этого рода. Вотъ задача изъ сборника Магницкаго: «Нѣкій человѣкъ имяше жену и три сына и дщерь едину: той человѣкъ при смерти своей написа въ завѣтѣ своемъ послѣди себе раздѣлити пожитки, женѣ осмую часть всего имѣнія, сыномъ же всякому ихъ вдвое при дщери своей, изъ тѣхъ $^7/_8$ всего имѣнія, по смерти же его обрѣтеся имѣнія на 48000 рублевъ, и вѣдательно есть, колико кому досталось изъ того его всего имѣнія: придетъ: женѣ 6000 рублевъ, дѣтемъ мужеску полу 12000 рублевъ, а дщери 6000 рублевъ:

			зри $\frac{48000}{8}$		6000	женѣ
48000	первому	2				
6000	второму	2		2	12000	
42000	третьему	2	7 — 42000	2	12000	сыномъ
		1		2	12000	
всѣмъ дѣлемъ	дщери	7		1	6000	дщери.

Въ прежнее время авторы учебниковъ давали очень замысловатые вопросы касательно завѣщаній. Напр., они разсчитывали доли такъ, что сумма ихъ не составляла единицы, и тутъ приходилось много мудрить, прежде чѣмъ придти къ сносному рѣшенію. Дѣйствительно, если осталось три наслѣдника, и первому отказана $^1/_2$ имѣнія, второму $^1/_3$ и послѣднему $^1/_4$, то какъ же тутъ поступить, вѣдь эти доли образуютъ вмѣстѣ больше, чѣмъ цѣлое наслѣдство, именно $^{13}/_{12}$ наслѣдства: въ такихъ случаяхъ брали, обыкновенно, отношеніе частей и по нимъ дѣлили: въ нашемъ примѣрѣ $^1/_2 : {}^1/_3 : {}^1/_4 = 6 : 4 : 3$, слѣдовательно, старшему сыну надо дать $^6/_{13}$, второму $^4/_{13}$ и третьему $^3/_{13}$ всего наслѣдства.

Любопытную задачу въ этомъ родѣ далъ знаменитый римскій юристъ Сальвіанъ Юліанъ, жившій при императорахъ Адріанѣ и Антонинѣ Пiѣ (во II в. по Р. Х.) «Нѣкто, умирая, оставилъ беременную жену и завѣщалъ: если у меня родится сынъ, то пусть ему дано будетъ $^2/_3$ имѣнія, а женѣ остальная $^1/_3$, если же родится дочь, то ей $^1/_3$, а женѣ остальныя $^2/_3$; родилась двойня,—сынъ и дочь, какъ же теперь раздѣлить имѣніе?» Сальвіанъ предложилъ сыну дать 4 части, женѣ 2 и дочери 1. Задача считалась очень интересной и даже вошла въ пандекты, византійскій сборникъ законовъ. Между прочимъ, Алькуинъ, придворный математикъ Карла Великаго (въ VIII в. по Р. Х.), думалъ надъ этой же задачей, но она изложена у него съ другими числами. По Алькуину, сыну завѣщано $^3/_4$ и вдовѣ $^1/_4$, дочери $^7/_{12}$ и вдовѣ $^5/_{12}$. Къ задачѣ приложено переписчикомъ рѣшеніе, съ которымъ согласиться нелегко: чтобы удовлетворить сына и мать надо 12 долей, а еще дочь и мать 24 доли; по 1-му условію сынъ получаетъ 7 долей, мать 3, по второму—мать 5 и дочь 7, всего приходится матери $\frac{3+5}{24} = {}^1/_3$, сыну $\frac{9}{24} = {}^3/_8$, дочери $^7/_{24}$.

Всѣ задачи на завѣщанія рѣшались тройнымъ правиломъ и относились къ той группѣ, которая въ старинныхъ русскихъ ариѳметикахъ озаглавливалась: «статья дѣловая въ тройномъ правилѣ», т. е. статья, гдѣ производится дѣлежъ, то былъ дѣлежъ заработка, награды и т. п. За ней шла «торговая мѣновая въ тройномъ правилѣ», т. е. статья объ обмѣнѣ, которая также приводилась къ тройному правилу. Потомъ «статья торговая складная и дѣлительная», гдѣ прибыль дѣлилась соотвѣтственно вложенному капиталу. Затѣмъ «статья торговая складная съ прикащики и съ людьми ихъ», въ ней нужно было выдѣлять кромѣ прибыли еще жалованье прикащикамъ. И, наконецъ, шла «торговая складная со времены»: здѣсь принимался во вниманіе не только капиталъ, вложенный каждымъ компаньономъ въ предпріятіе, но и время оборота.

Задачи на пропорціональное дѣленіе рѣшались, обыкновенно, тройнымъ правиломъ, при этомъ не оставалось мѣста ни сокращеніямъ, ни упрощеніямъ и не давалось простора личной сообразительности ученика. Обыкновенно, сперва помѣщалось условіе вопроса, потомъ тутъ-же рѣшеніе, ученикъ все это заучивалъ и впослѣдствіи старался это прилагать, когда встрѣчалъ вопросъ, похожій на заученный.

Правило процентовъ.

Взиманіе процентовъ практиковалось еще въ древнія времена, но въ различныхъ государствахъ къ нему относились различно и вообще это дѣло было совершенно не урегулировано.

У римлянъ допускались только простые проценты, они высчитывались по одному въ мѣсяцъ и выплачивались по истеченіи каждаго мѣсяца. Брать сложные проценты было у нихъ запрещено закономъ. Также и въ средніе вѣка во многихъ государствахъ сложные проценты запрещались закономъ, и тѣ, кто ихъ бралъ, считались ростовщиками и пользовались презрѣніемъ. Это были, обыкновенно, евреи. Законодатель исходилъ изъ того положенія, что если человѣкъ затрудняется простыми процентами и не можетъ вносить ихъ аккуратно въ срокъ, то безжалостно было-бы начислять на него сложные проценты. Въ ариѳметическихъ сборникахъ такія задачи попадались рѣдко, и въ условіяхъ ихъ говорилось, обыкновенно, про евреевъ. Въ русскомъ обществѣ до 18 ст. начисленіе процентовъ, очевидно, тоже не пользовалось расположеніемъ, по крайней мѣрѣ, у Магницкаго (1703 г.) очень мало задачъ на вычисленіе роста, и самое слово «процентъ» у него не употребляется.

Въ XV—XVI стол., когда въ Западной Европѣ замѣчается особенный подъемъ торговли, всякія коммерческія вычисленія стали пользоваться вниманіемъ и среди нихъ вычисленіе сложныхъ процентовъ, но математикамъ того времени стоило большого труда рѣшать эти вопросы: не было десятичныхъ дробей и логариѳмовъ, да кромѣ того, мѣры стоимости были во всякомъ государствѣ свои, и переводить ихъ изъ одной системы въ другую считалось нелегкой операціей. Итальянскій математикъ Тарталья даетъ 4 способа вычисленія сложныхъ процентовъ: 1) опредѣляется наращенный капиталъ въ концѣ перваго года, затѣмъ въ концѣ второго и т. д., отвѣтъ находится при помощи тройного правила. 2) Пользуются извѣстной алгебраической формулой aq^n, но ея буквально не приводятъ. 3) Приростъ капитала выражаютъ его долей $\frac{\%}{100}$ $\left(\text{алгебраически } \frac{p}{100}\right)$ и находятъ эту долю сперва отъ начальнаго капитала, потомъ отъ перваго наращеннаго затѣмъ отъ второго наращеннаго и т. д.; эту долю прибавляютъ, когда нужно, къ первому капиталу, ко второму и т. д. 4) Берется произвольная сумма, обыкновенно, сто рублей, и для нея находится отвѣтъ, т. е. капиталъ вмѣстѣ съ процентными деньгами, потомъ конечный отвѣтъ помножаютъ на то число, которое показываетъ, сколько сотенъ въ данномъ первоначальномъ капиталѣ. На этомъ способѣ основано и нынѣшнее пользованіе таблицами сложныхъ процентовъ.

Чтобы избѣжать трудныхъ дробей, нѣмецкій математикъ Рудольфъ (XVI в.) еще до введенія десятичныхъ дробей пользовался десятичными долями. Его примѣръ такой: во что обратится сумма 375 флориновъ черезъ 10 лѣтъ по 5%? Рѣшеніе:

375 фл. начальн. кап.
 18 75
393 / 75 капиталъ по истеченіи 1-го года.
 19 68 75
413 / 43 75 по ист. 2-го года.
 20 67 18 75
434 / 109 375 по ист. 3-го года.

610 / 835 485 041 540 527 34 375 по ист. 10-го года.

Въ связи съ процентами стоитъ *учетъ векселей*. Правило учета было извѣстно еще римлянамъ. Такъ, напр., римскій математикъ Секстъ Юлій Африканъ, писавшій свои сочиненія по ариѳметикѣ и геометріи при императорѣ Александрѣ Северѣ (222—235 г.), разсматривалъ такъ наз. interesurium, т. е. ученіе объ интересахъ или процентахъ, по нашему—коммерческій учетъ векселей. Отъ римлянъ онъ перешелъ къ народамъ Западной Европы, и тамъ мы его видимъ въ

XIII вѣкѣ, у итальянцевъ, которые первые надумали устраивать коммерческіе банки (первые итальянскіе банки относятся къ 1200 г. по Р. X.) Самый старинный вексель, дошедшій до насъ, помѣченъ 1325 годомъ и писанъ въ Миланѣ, получить по нему въ Луккѣ. Въ XIII и XIV ст. въ Германіи встрѣчались векселя совершенно примитивной формы, но зато исключавшіе возможность всякой подделки: бралась бирка, длинная палочка, и на ней графили такія зарубки, которыя могли-бы точно выражать вексельную сумму: затѣмъ эта бирка кололась по длинѣ на 2 палочки, и одна изъ нихъ вручалась должнику, другая—заимодавцу; подделать такой вексель было невозможно, потому что иначе палочки другъ къ другу не подойдутъ. На учетъ векселей смотрѣли въ древніе вѣка очень косо и дурная слава утвердилась за нимъ потому, что маклера не брезговали большими процентами: довольно обыкновеннымъ размѣромъ было 33%, а если какой маклеръ учитывалъ изъ 20%, то онъ считался милостивымъ.

Коммерческій учетъ называется въ настоящее время иначе учетомъ Пиккарда или Карицова, по имени составителя и издателя таблицъ этого учета. По этому способу учета заимодавецъ остается въ убыткѣ, если учетный процентъ равенъ тому проценту, по которому брали деньги взаймы. Нашъ математическій учетъ называется иначе учетомъ Гофмана (около 1731 г.) Третій способъ учета предложенъ Лейбницемъ. Въ немъ есть сходство съ математическимъ учетомъ, но проценты на уплачиваемую сумму начисляются сложные. Объяснимъ это алгебраически. Пусть плата будетъ X, валюта A, число процентовъ p, срокъ n лѣтъ: тогда $x\left(1+\frac{p}{100}\right)^n = A$; отсюда $X = A : \left(1+\frac{p}{100}\right)^n$ слѣдовательно, скидка или учетъ по векселю составляетъ

$$A\left\{1 - \frac{1}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n}\right\}.$$

Постепенное погашеніе государственныхъ долговъ, устройство лоттерей, покупка капитала путемъ періодическихъ взносовъ, различные виды страхованія и другія банковскія и коммерческія операціи требуютъ вычисленій, основанныхъ на правилѣ сложныхъ процентовъ и на теоріи вѣроятностей. Эти вычисленія составляютъ предметъ такъ назыв. политической (коммерческой) ариѳметики. Терминъ «политическая ариѳметика» былъ въ большомъ ходу въ 2-й половинѣ XVIII столѣтія. Въ новѣйшее время этотъ отдѣлъ обработанъ съ большой полнотой вѣнскими профессорами Шпитнеромъ и Габерлемъ. Въ XIX столѣтіи самое понятіе о процентѣ расширилось, благодаря введенію его въ статистику. Теперь уже отброшено старое опредѣленіе процента, какъ прибыли или убыли на сто рублей капитала, и вмѣсто того говорятъ, что процентъ просто сотая доля количества. Это опредѣленіе принимается, обыкновенно, во всѣхъ новѣйшихъ учебникахъ.

Скажемъ теперь нѣсколько словъ о правилѣ, которое у нѣмцевъ носитъ названіе «Terminrechnung», а у насъ озаглавливается «вычисленіе сроковъ платежей». Оно примѣняется тогда, когда нѣсколько капиталовъ, отданныхъ на разные сроки и по разному числу процентовъ, надо замѣнить общимъ капиталомъ, съ тѣмъ, чтобы онъ уплачивался въ общій срокъ. Расчетъ долженъ быть основанъ на томъ, чтобы ни заимодавецъ, ни должникъ не терпѣли убытка. Примѣръ можно взять такой: я обязанъ уплатить 1000 рубл. черезъ 2 года по 5%, 2500 р. черезъ 3 г. по 4% и 3000 р. черезъ 1 годъ по 6%. Когда въ одинъ общій срокъ я могу отдать эти деньги сразу? Уже въ XVI столѣтіи итальянскими учеными было предложено два совершенно вѣрныхъ пути для рѣшенія подобныхъ вопросовъ. Лука де-Бурго разсуждаетъ слѣдующимъ образомъ. Положимъ, что должникъ платитъ всѣ деньги въ первый срокъ; тогда онъ платитъ напрасно процентныя деньги съ остальныхъ капиталовъ, которымъ срокъ еще не наступилъ, а именно платитъ за время между 1-мъ срокомъ и остальными; высчитаемъ эту лишнюю сумму процентныхъ денегъ, высчитаемъ также, въ какое время эту сумму принесутъ всѣ капиталы, тогда мы и получимъ средній срокъ. Тарталья и Видманнъ пользуются нѣсколько инымъ пріемомъ, который, сравнительно съ пріемомъ Бурго, нѣсколько сокращеннѣе, именно тѣмъ, что вмѣсто прибыли вводятся произведенія капиталовъ на число дней или лѣтъ. Это и есть тотъ самый нормальный пріемъ, какой употребляется въ настоящее время.

Наконецъ, правило процентовъ, отчасти съ вексельными операціями, примѣняется къ такъ наз. переводу платежей. Обороты по переводу платежей вошли въ обыкновеніе давно, одновременно съ изобрѣтеніемъ денегъ. Такъ какъ купцамъ различныхъ націй, ведшимъ между собою торговлю, необходимо было однѣ монеты переводить въ другія, то для этого имѣлись мѣняльныя конторы: ихъ всегда можно было встрѣтить на рынкахъ большихъ городовъ. Что касается письменныхъ переводовъ, то они первоначально были введены евреями. Изгнанные въ VII ст. изъ Франціи, евреи перешли въ Ломбардію и внесли туда обыкновеніе пользоваться переводами, а итальянцы очень охотно приняли этотъ порядокъ. Затѣмъ Гибеллины, когда ихъ лишили Ломбардіи, перенесли съ собою новый порядокъ въ Амстердамъ, а оттуда онъ распространился уже по всей Европѣ. Около 1315 г. Іоаннъ, герцогъ Лотарингскій, далъ Ганзейцамъ привилегію на производство въ Брабантѣ денежныхъ переводовъ. Въ 1445 г. мы видимъ переводы въ Нюренбергѣ. Денежные письменные переводы доставляли большое удобство и выгоду, такъ какъ они избавляли отъ лишнихъ трудовъ и издержекъ, и, кромѣ того, при нихъ было меньше риска, что деньги потеряются, къ тому же надо замѣтить, что нерѣдко бывали случаи, когда въ иныхъ государствахъ запрещалось вывозить туземную монету за-границу, подъ страхомъ конфискаціи. Всѣ операціи по переводу находились въ средніе вѣка въ начальной стадіи своего развитія; онѣ ограничивались вычисленіемъ суммъ по курсу, коммиссіонныхъ же процентовъ не упоминается, такъ что обыкновеніе отчислять процентъ за переводъ принадлежитъ новѣйшему времени.

Цѣпное правило.

Начало цѣпного правила можно прослѣдить у индусовъ, именно, оно содержится въ ариѳметикѣ индуса Брамегупты, относящейся къ VII ст. по Р. Х. Въ Германіи оно встрѣчается раньше всѣхъ у Адама Ризе (въ XVI ст.), распространенію его особенно способствовалъ голландецъ Ванъ-Реесъ (1740 г.), по его имени и правило часто называется правиломъ Рееса, другія его названія — Kettenregel на нѣмецкомъ языкѣ и Règle conjointe на французскомъ.

Прямой цѣлью, для которой и придумано цѣпное правило, является переводъ мѣръ одной системы въ мѣры другой, при посредствѣ мѣръ еще какой-нибудь третьей системы. Возьмемъ такую задачу:

сколько флориновъ стоятъ 8 центнеровъ, если въ центнерѣ 100 фунтовъ, въ фунтѣ 32 лота, каждые 6 лотовъ стоятъ 42 крейцера, 60 крейцеровъ стоятъ одинъ флоринъ? Конечно, эту задачу можно рѣшить простыми дѣленіями и умноженіями, можно ее рѣшить черезъ пропорціи, но изобрѣтатели цѣпного правила не довольствовались этимъ и хотѣли дать такой пріемъ, по которому человѣкъ могъ бы работать, какъ машина, почти не разсуждая и не давая себѣ отчета. По цѣпному правилу условіе задачи пишется такъ:

X флор.—8 центн.
1 центн.—100 фун.
1 фун.—32 лота.
6 лот.—42 крейц.
60 крейц.—1 флоринъ.

Затѣмъ пишется прямо формула отвѣта, а для этого достаточно перемножить числа праваго ряда и сдѣлать это числителемъ и произведеніе лѣвыхъ чиселъ сдѣлать знаменателемъ, будетъ тогда

$$X = \frac{8.\ 100.\ 32.\ 42.\ 1.}{1.\ 1.\ 6.\ 60.}$$

Въ XIII в. и позже въ Италіи условія подобныхъ задачъ располагались иначе, именно не двумя вертикальными столбцами, а двумя горизонтальными строками; получается такое расположеніе:

42 кр. 6 лот. 100 ф. 1 центн.
1 фл. 60 кр. 32 лот. 1 ф. 8 центн.

Затѣмъ проводилась ломаная линія между множителями числителя той дроби, которая должна выражать отвѣтъ, и такая же линія между множителями знаменателя; слѣдов. долженъ получиться чертежъ:

42 6 100 1
1 60 32 1 8

Онъ представляетъ подобіе цѣпи, и благодаря ему самое правило названо цѣпнымъ.

Совершенно справедливо замѣчаютъ противники Ванъ-Рееса, что цѣпное правило не только не полезно для начальнаго обученія, но даже вредно. Оно, подобно многимъ другимъ правиламъ, стремится внести механичность и уничтожить свободное сужденіе при выборѣ способа; оно пригодно, пожалуй, для людей, которымъ часто надо переводить мѣры изъ одной системы въ другую, но оно неумѣстно для общеобразовательной школы, такъ какъ вноситъ спеціальный техническій элементъ.

Итальянская практика.

Странное названіе, чуждое нашимъ учебникамъ! Что же это за правило?

До XIX столѣтія оно обязательно было во всѣхъ ариѳметикахъ. Какъ показываетъ самое заглавіе, итальянская практика обязана своей разработкой итальянцамъ (главнымъ образомъ Тартальѣ), и касается она пріемовъ, вызванныхъ практикой и приложимыхъ на практикѣ. Происхожденіе ея слѣдующее. Въ то время, какъ средневѣковая ариѳметика старалась изъ всѣхъ силъ напичкать ученика всевозможными готовыми правилами, по которымъ, какъ по шаблону, можно было рѣшать любой вопросъ, не затрудняя себя придумываніемъ способовъ, въ это время, въ противовѣсъ такому направленію, природная человѣческая сметливость, естественная пытливость и ничѣмъ неуничтожаемая потребность думать—искали себѣ выхода, находили его въ изобрѣтеніи оригинальныхъ пріемовъ, которые болѣе соотвѣтствовали характеру каждаго вопроса, облегчали и упрощали его. Такимъ образомъ, итальянская практика — это собраніе искусственныхъ пріемовъ, отчасти письменныхъ, иногда устныхъ, нерѣдко простонародныхъ, которые здравымъ человѣческимъ разсудкомъ противопоставляются заученнымъ формуламъ сухой науки. Склонность къ такимъ пріемамъ живетъ во всякомъ народѣ, и итальянцы нѣсколько опередили остальныхъ только потому, что ихъ роль коммерсантовъ и посредниковъ скорѣе дала выходъ природнымъ задаткамъ.

Тарталья различаетъ простую итальянскую практику и искусственную. Простой практикой рѣшаются вопросы не особенно сложные, которые относятся главн. обр. къ простому тройному правилу. Первый примѣръ: 8 килограммовъ саго стоятъ 3,80 марокъ, что стоятъ 12 килограммовъ саго? Для рѣшенія мы сперва высчитаемъ стоимость 4 килограммовъ, а для этого достаточно 3,80 марокъ раздѣлить пополамъ, потому что 4 килограмма составляютъ половину 8, и слѣд., цѣна ихъ составляетъ половину 3,80 марокъ, затѣмъ складываемъ стоимость 8-ми килогр. и 4-хъ и получаемъ искомую цѣну 12-ти:

8 килогр. — 3,80 мар.
4 — — 1,90 мар.
12 килогр.—5,70 марокъ.

Приведемъ еще примѣръ, въ которомъ удобнѣе не складывать, а вычитать: 15 арш. матеріи стоятъ 16, 80 рублей, что стоятъ 10 аршинъ матеріи?

15 арш. — 16,80 руб.
5 арш. — 5,60 руб.
10 арш. — 11,20 руб.

Искусственная итальянская практика состоитъ въ слѣдующемъ. Если въ задачѣ встрѣчается какой-нибудь сложный множитель, то, разбиваютъ его на слагаемыя и эти слагаемыя подбираютъ такъ, чтобы самое большое являлось кратнымъ остальныхъ, или вообще одно слагаемое содержало въ себѣ другое; когда намъ удалось такъ разложить, то мы умножимъ данное число на большее слагаемое, а всѣ остальныя произведенія получимъ дѣленіемъ и именно воспользуемся свойствомъ, что во сколько разъ меньше множитель, во столько же разъ меньше и произведеніе. Примѣръ: сколько прибыли получится съ 9000 руб. по 4% за 1 годъ 2 м. 24 д? Въ этомъ случаѣ вычисляемъ сперва прибыль за 1 годъ, потомъ за $^1/_6$ года, т.-е. за 2 мѣсяца, для этого дѣлимъ годовую прибыль на 6, потомъ вычисляемъ за 20 дней — они составляютъ $^1/_3$ двухъ мѣсяцевъ, потомъ за 4 дня, т.-е. за $^1/_5$ двадцати дней; въ концѣ всѣ полученныя прибыли складываемъ. Тарталья даетъ подобнымъ задачамъ такое расположеніе:

1 г.	— 9000 руб.	— 4%	— 360 р.				
2 мѣс.	6	—	— 60 р.	(: 6			
20 дней	3	—	— 20 р.	(: 3			
4 дня	5	—	— 4 р.	(: 5			
			444 р.				

Еще примѣръ: найти прибыль съ 6000 р. по 4% за 1 г. 7 м. 9 дней.

1 г.	—	6000 р.	4%	240 р.
4 м.	—	3 «	—	80 «
3 м.	—	4 «	—	60 «
9 дн.	—	10 «	—	6 «
				386 рублей.

Изъ этихъ примѣровъ можно понять, чѣмъ отличается италъянская практика отъ тройного правила: въ тройномъ правилѣ идетъ приведеніе къ единицѣ или, точнѣе сказать, къ простой единицѣ, здѣсь же вопросъ приводится къ сложной единицѣ, т. е. къ группѣ единицъ. Это виднѣе на такомъ примѣрѣ: 22 фунта стоятъ 10 руб., сколько стоятъ 33 ф.? По итальянской практикѣ не надо приводить этого вопроса къ 1 фунту, а удобнѣе привести прямо къ кратной части всего количества, къ 11 фун.; получимъ ихъ стоимость = 5 р.; а потомъ остается 5 руб. повторить 3 раза.

Въ послѣднее время задачи на приведеніе къ кратной части и на сложеніе кратныхъ частей стали встрѣчаться въ нѣкоторыхъ задачникахъ, *особенно для начальной школы*. Это очень хорошо, потому что такіе вопросы развиваютъ сообразительность, даютъ просторъ выбору и обсужденію способовъ и вообще соотвѣтствуютъ истинной цѣли ариѳметики, какъ общеобразовательнаго учебнаго предмета, имѣющаго ввиду развить умъ, а не только снабдить ученика навыками счета.

Фальшивое правило.

Существовало и такое правило, и не только существовало, но пользовалось громаднымъ вниманіемъ. По крайней мѣрѣ, у Магницкаго особая 4-я часть его ариѳметики была посвящена правиламъ «фальшивымъ или гадательнымъ», въ то время, какъ въ 1-й части или дѣйствія надъ цѣлыми числами, во 2-й надъ дробями, въ 3-й помѣщено тройное правило и въ 5-й и послѣдней о «прогрессіи и радиксахъ (т. е. корняхъ) квадратныхъ и кубичныхъ». Что же это за фальшивое правило, и почему у него такое странное названіе? Магницкій какъ бы предвидитъ подобный вопросъ и потому объясняетъ успокоительно: «*фальшивая правила, сирѣчь не истинная положенія, заие чрезъ два не истинная положенія изобрѣтаетъ самое оно желаемое истинное число*».

Объяснимъ это правило на общеизвѣстной задачѣ о гусяхъ, кстати она и помѣщена въ ариѳметикѣ Румовскаго (1760 г.), какъ примѣръ фальшиваго правила. Задача такая: «летѣло стадо гусей, на встрѣчу имъ летитъ одинъ гусь и говоритъ: здравствуйте, сто гусей, а тѣ ему отвѣчаютъ: нѣтъ, насъ не сто гусей, а если бы насъ было еще столько, сколько есть, да еще полъ-столька, да четверть-столька, да еще ты одинъ гусь съ нами, тогда насъ было бы ровно сто гусей. Сколько ихъ было?» Рѣшеніе такое: положимъ, во-первыхъ, что гусей было хоть двадцать: сочтемъ теперь, что составитъ столько, да полъ-столька, да четверть столька, да еще одинъ, и выйдетъ всего гусей $20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56$; а ихъ надо 100, слѣдовательно не достаетъ 44-хъ. Положимъ теперь, во-вторыхъ, что гусей было 24, и сосчитаемъ опять итогъ, выйдетъ $24 + 24 + 12 + 6 + 1 = 67$, не достаетъ до 100 33-хъ. Итакъ, первое предположеніе было 20, недостатокъ 44, второе предположеніе 24, недостатокъ 33. Теперь слѣдуетъ перемножить накрестъ

$$\begin{array}{cc} 20 & 24 \\ 44 & 33 \end{array}$$

и изъ большаго произведенія вычесть меньшее, т. е. $44 \cdot 24 - 20 \cdot 33 = 1056 - 660 = 396$ и этотъ остатокъ 396 раздѣлить на разницу между обоими недостатками $44 - 33$, получится $396 : 11 = 36$, вѣрный отвѣтъ задачи.

Общее правило выражается такъ: надо принять для вопроса задачи какое-нибудь произвольное значеніе, высчитать тотъ результатъ, который по[illegible] когда подставимъ въ задачу это произвольное число, [illegible] тать погрѣшность; *точно также берется* второе произвольное значеніе и вычисляется второй результатъ и вторая погрѣшность: тогда

$$X = \frac{1\ \text{погр.} \times 2\ \text{знач.} - 1\ \text{знач.} \times 2\ \text{погрѣш.}}{1\ \text{погр.} - 2\ \text{погр.}}$$

Способъ фальшиваго правила былъ извѣстенъ индусамъ и арабамъ еще въ IX в. по Р. Х., причемъ выводъ его принадлежитъ, по всей вѣроятности, индусамъ. Въ латинскихъ рукописяхъ Парижской библіотеки говорится, что индусское сочиненіе, относящееся къ этому предмету, было переведено въ XII в. на еврейскій языкъ испанскимъ евреемъ Авраамомъ бэнъ-Эзра. Съ еврейскаго языка это сочиненіе было переведено впослѣдствіи на латинскій. У арабскихъ писателей фальшивое правило пользовалось широкимъ распространеніемъ, и объ немъ говорятъ всѣ арабскіе математики.

Альхваризми (въ IX в. по Р. Х.) даетъ слѣдующій примѣръ: «найти такое число, что если отнять отъ него $^1/_3$ и $^1/_4$ его, то въ остаткѣ будетъ 8»; положимъ, что число будетъ 12, тогда остатокъ вышелъ бы 5, вмѣсто 8, т. е. на 3 меньше; пусть число 24, тогда остатокъ оказался бы больше настоящаго на 2, теперь въ формулѣ рѣшенія намъ придется сложить 2 произведенія, о которыхъ говорилось выше въ правилѣ, а не вычесть одно изъ другого, и это потому, что въ задачѣ одинъ отвѣтъ больше настоящаго, а другой меньше его $(24 \cdot 3 + 12 \cdot 2) : (3 + 2) = 19^1/_5$. О фальшивомъ правилѣ много говоритъ также Леонардо Фибоначчи, итальянскій математикъ 13 ст. Въ русскихъ математическихъ рукописяхъ XVII в. это правило извѣстно подъ такимъ именемъ: «статья цифирная именуется вымышленая или затѣйчивая. Высокаго остропамятнаго разума и умнаго прилежаніе ея-же нѣціи фальшивою строкою нарекоша, иже ни малымъ чѣмъ погрѣшается».

Сущность фальшиваго правила лучше всего объясняется алгебраически. Возьмемъ одно уравненіе первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ: $ax + b = 0$. Примемъ x равнымъ произвольному количеству k_1: подставивъ k_1 вмѣсто x, пусть мы получимъ во второй части вмѣсто нуля n_1, такъ-что $ak_1 + b = n_1$, т. е. ошибка оказалась во второй части на n_1. Дадимъ иксу другое произвольное значеніе k_2, и пусть вторая часть обратится въ n_2, такъ-что ошибка второй части уравненія будетъ n_2. Теперь мы получимъ такую систему:

$$ak_1 + b = n_1$$
$$ak_2 + b = n_2,$$

откуда $$a = \frac{n_1 - n_2}{k_1 - k_2},\quad b = \frac{k_1 n_2 - n_1 k_2}{k_1 - k_2},$$

но такъ какъ $x = -\frac{b}{a}$, то образуется слѣдующее выраженіе для неизвѣстнаго:

$$x = \frac{n_1 k_2 - k_1 n_2}{n_1 - n_2}$$

Изъ этой формулы выходитъ: $n_1 x - n_2 x = n_1 k_2 - n_2 k_1$, или $n_1 (x - k_2) = n_2 (x - k_1)$, откуда получается пропорція: $n_1 : n_2 = (x - k_1) : (x - k_2)$, т. е. *ошибки неизвѣстныхъ пропорціональны ошибкамъ уравненій. Этой пропорціей и устанавливается связь между фальшивымъ правиломъ и способомъ пропорцій.*

Фальшивое правило вводилось во всѣ учебники ариѳметики до начала 19-го вѣка и считалось необходимой ихъ частью и однимъ изъ самыхъ важныхъ отдѣловъ. Оно встрѣчается, между прочимъ, въ ариѳметикѣ Безу, переведенной на русскій языкъ В. Загорскимъ въ 1806 году. Въ настоящее время это правило совершенно исключено изъ ариѳметическаго курса, и его нигдѣ найти нельзя. Двѣ причины содѣйствовали его исключенію. Во-первыхъ, *выводъ его можетъ быть сдѣланъ только алгебраически* и, слѣдовательно, въ ариѳметикѣ онъ *не можетъ быть объясненъ* ученикамъ и требуетъ отъ нихъ прямого заучиванія; во-вторыхъ, никакой учебникъ не разграничивалъ, какія задачи можно рѣшать фальшивымъ правиломъ, и какихъ нельзя имъ рѣшать; а, между тѣмъ, это существенно важно, потому что, если примѣнить правило къ тому, къ чему оно непримѣнимо, то выйдетъ, конечно, одно печальное недоразумѣніе. На самомъ дѣлѣ это правило можетъ имѣть силу только для тѣхъ задачъ, гдѣ *вся задача сводится* къ умноженіямъ и дѣленіямъ *неизвѣстнаго.*

Прочія правила: смѣшенія, дѣвичье и другія.

Правило смѣшенія было въ употребленіи, очевидно, очень давно, такъ какъ потребности въ смѣшеніи лѣкарствъ и какихъ-нибудь составовъ, а также въ сплавленіи металловъ имѣли мѣсто еще въ древнемъ мірѣ. Формулы смѣшенія были найдены, вѣроятно, отчасти путемъ опыта, отчасти алгебраическими выкладками; потомъ онѣ были перенесены въ ариѳметику, запоминались учениками и примѣнялись къ рѣшенію задачъ.

Леонардо Фибоначчи въ XIII в. даетъ такіе пріемы, которые надо признать совершенно механическими; и вся забота его направлена только къ тому, чтобы расположить данныя числа какъ слѣдуетъ; задачи у него раздѣляются на 2 вида, тѣхъ самыхъ, какіе сейчасъ и у насъ: въ первомъ видѣ узнается, какого достоинства выйдетъ смѣсь, если извѣстно количество смѣшиваемыхъ веществъ и ихъ *достоинство*: *во второмъ видѣ надо опредѣлить*, сколько слѣдуетъ взять каждаго вещества, чтобы получить смѣсь такого достоинства, какое требуется. У Леонардо встрѣчаются задачи на смѣшеніе нѣсколькихъ сортовъ, и *есть примѣры болѣе* отвлеченнаго характера, въ такомъ родѣ: «Стоимость 30, количество 30, стоимость единицы — 3, 2, $^1/_2$; рѣшеніе: I : III = 1 : 4, II : III = 1 : 2, положимъ на I съ III всего 15 единицъ, изъ нихъ 3 на I, 12 на III; на II съ III кладемъ тоже 15 единицъ, изъ которыхъ 5 на II, а 10 на III; всего тогда *получится на* I = 3, на II = 5 и на III = 22». Эта задача, какъ видно, неопредѣленная.

Въ 15—16 вѣкѣ задачи на смѣшеніе рѣшались нѣсколько иначе, чѣмъ мы ихъ рѣшаемъ; *онѣ приводились* къ тройному правилу, и для каждаго неизвѣстнаго составлялась отдѣльная строка, отдѣльная пропорція.

Въ русскихъ учебникахъ XVII вѣка *правилу смѣшенія* соотвѣтствовала «статья о нечисти во всякихъ овощахъ и въ товарехъ», въ ней говорилось о смѣшеніи чистаго товара съ нечистымъ и о сплавѣ золота, серебра и мѣди. У Магницкаго статья «третья надесять» въ тройномъ правилѣ, подъ заглавіемъ «о соединеніи вещей», начинается прямо съ задачи, безъ всякаго предисловія и объясненія: «Нѣкій винопродавецъ имяше четыре разныя вины, ихъ же продаяше разною цѣною, по 10 алтынъ, по 8 алтынъ, по 6 алтынъ и по 5 алтынъ по 2 денги галенокъ, и хощетъ отъ тѣхъ разноцѣнныхъ винъ бочку наліяти въ 80 галенковъ, чтобы галенокъ былъ цѣною въ 6 алтынъ 4 денги, и вѣдательно есть, колико галенковъ котораго вина вліяти достоитъ во ону бочку, придетъ 16, 8, 16, 40. Зри како изобрѣтати

	цѣна 30	4	
желаемая цѣна 20	цѣна 16	10	
паки твори 20	цѣна 24	2	*сложи все, придетъ* 20
	цѣна 18	4	
		20 и глаголи:	

галенковъ въ бочки 20 — 80 или паче: множь 1 — 4 { 4 — 16 добраго
10 — 40 плохого
2 — 8 среднелучшаго
4 — 16 среднехуждшаго

По толику галенковъ таковыхъ разныхъ винъ въ бочкѣ оной вина его же цѣна по 20 коп. галенокъ».

Понятно, зачѣмъ Магницкій помѣщалъ задачи на смѣшеніе, и зачѣмъ онѣ были въ старинныхъ ариѳметикахъ: учебникъ считался тогда сборникомъ всевозможныхъ правилъ, пригодныхъ для разныхъ житейскихъ случаевъ, къ нему, какъ къ какому-нибудь справочнику, и обращались за указаніями и искали практическаго отвѣта. Теперь же техника и ремесла, равно какъ и гражданская жизнь, настолько развились и расширились, что нечего и думать сообщить ученику запасъ предписаній на всевозможные житейскіе случаи. Кромѣ того, смѣшеніе примѣняется теперь не настолько часто, чтобы считать его употребительнымъ дѣйствіемъ и пріучать къ нему учениковъ и ученицъ изъ разныхъ классовъ общества и изъ разныхъ состояній. Такимъ образомъ, практическое значеніе правила смѣшенія можно считать въ *настоящее время за нуль, особенно если* имѣть ввиду задачи второго рода. Но и образовательное, развивающее его значеніе тоже очень не велико, потому что тѣ же задачи второго рода, по самой своей сущности, принадлежатъ алгебрѣ, съ большимъ удобствомъ и пониманіемъ рѣшаются въ ней, въ ариѳметикѣ же онѣ являются какимъ-то оторваннымъ кускомъ и потому не могутъ быть проработаны вполнѣ сознательно. Гораздо лучше было бы и для учениковъ, и для науки, если бы задачи второго рода на смѣшеніе были отнесены къ алгебрѣ.

Дѣвичье правило. Оригинальное и странное названіе, получившееся оттого, что прежде (впрочемъ бываетъ это и теперь) задачи располагались и назывались не по способамъ ихъ рѣшенія, а по внѣшнему виду. Къ дѣвичьему правилу относились задачи, въ которыхъ говорилось о дѣвицахъ. Правда, всѣ онѣ въ старыхъ сборникахъ пріурочивались къ одному типу, именно къ отдѣлу неопредѣленныхъ задачъ. Типической задачей можетъ служить слѣдующая, заимствованная изъ Адама Ризе, составившаго учебникъ въ XVI ст. «26 персонъ издержали вмѣстѣ 88 марокъ, при чемъ мужчина издерживалъ по 6 марокъ, женщина по 4 и дѣвушка по 2; сколько было мужчинъ, женщинъ и дѣвушекъ?» Адамъ Ризе учитъ рѣшать такимъ образомъ: пусть, говоритъ онъ, всѣ 26 персонъ были бы дѣвушки, тогда онѣ издержали бы $2.26=52$ марки, слѣдовательно, остается $88-52=36$ марокъ. Разложимъ теперь 36 на такія два слагаемыхъ, чтобы одно состояло изъ четверокъ, другое изъ паръ, напримѣръ, 8 четверокъ и + 2 пары, или 5 четверокъ + 8 паръ, или еще 2 четверки + 14 паръ: такое расположеніе удобно тѣмъ, что 32 марки въ первомъ случаѣ мы отнесемъ на долю мужчинъ и 4 марки на долю женщинъ и расчислимъ такъ: мужчина тратитъ больше дѣвушки на 4 марки, ихъ можно принять всего 8 человѣкъ, такъ какъ $32:4=8$; женщина тратитъ больше дѣвушки на 2 марки, и женщинъ можно полагать 2, потому что $4:2=2$: слѣдовательно, получается въ отвѣтѣ 8 мужчинъ, которые заплатятъ вмѣстѣ 48 марокъ, 2 женщины—8 марокъ и 16 дѣвушекъ 32 марки, всего 88 марокъ. Другой рядъ отвѣтовъ можно бы получить, съ помощью этого же способа, такой: 5 мужч., 8 женщ. и 13 дѣвушекъ; и много другихъ рѣшеній, такъ какъ это задача неопредѣленная.

Первая неопредѣленная задача на латинскомъ языкѣ изъ тѣхъ, которыя дошли до насъ, содержится въ сборникѣ Алькуина (въ VIII ст. по Р. Х.) и выражается такъ: «100 шеффелей раздѣлить между мужчинами, женщинами и дѣтьми и дать при этомъ мужчинѣ по 3 шеффеля, женщинѣ по 2 и ребенку по $1/_2$ шефф.» Рѣшеніемъ этой задачи могло бы быть, напр., 24, 40 и 36; у Алькуина дано 11, 15, 74.

Кромѣ названія «дѣвичье», это правило имѣло иногда титулъ «слѣпого» правила и опять по той же самой причинѣ, именно, что въ неопредѣленныхъ задачахъ этого рода упоминалось о слѣпцахъ. Кстати скажемъ, что были и другія курьезныя правила, вродѣ правила «крокодиловъ», правила «роговъ» и т. п., и назывались они по той своей особенности, что въ задачахъ, которыя являлись характеристичными, упоминалось про крокодиловъ, рога и т. д.

Многое множество тѣхъ задачъ, которыми наполняются современные намъ сборники, идутъ изъ глубокой древности, пережили многія тысячелѣтія и терпѣливо переписываются однимъ составителемъ изъ другого.

Напр., извѣстная задача о бассейнахъ, которые наполняются трубами, и изъ которыхъ вода выливается, пользовалась вниманіемъ уже во времена Герона Александрійскаго (во 2 в. до Р. Х.). Метродоръ, жившій при Константинѣ Великомъ, даетъ задачу съ 4 трубами, изъ которыхъ 1-я можетъ наполнить бассейнъ въ день, 2-я—въ 2, 3-я—въ 3 и 4-я—въ 4 дня. Эту же задачу мы видимъ и у индусовъ, во времена математика Аріабгатты, въ 5 в. по Р. Х. Она же встрѣчается въ русскихъ старинныхъ ариометикахъ, и она же помѣщается во всѣхъ новѣйшихъ сборникахъ. Точно также задача о собакѣ, догоняющей зайца, имѣется уже въ сборникѣ Алькуина (въ 8 ст. по Р. Х.). Заяцъ впереди собаки на 150 футовъ, и онъ пробѣгаетъ 7 футовъ въ то время, какъ собака 9; для рѣшенія 150 предлагается раздѣлить пополамъ.

Рѣшеніе ариометическихъ задачъ всегда было несвободно отъ разныхъ недочетовъ, которые имѣютъ мѣсто и въ наше время и объясняются исторически. Во-первыхъ, даются ученикамъ иногда такія задачи, которыя пережили самихъ себя и утеряли смыслъ, потому что времена измѣнились; примѣромъ можетъ служить задача о курьерахъ: теперь уже вездѣ телеграфы, телефоны, сообщенія по желѣзнымъ дорогамъ, и поэтому нѣтъ никакой надобности посылать конныхъ курьеровъ, это было 50—100 лѣтъ тому назадъ, а сейчасъ это анахронизмъ. Во-вторыхъ, рѣшеніе задачъ никакъ не можетъ освободиться отъ того элемента механичности, который сжился съ нимъ въ теченіе многихъ сотенъ лѣтъ. Прежде всякая школа была главнымъ образомъ школой спеціальной и имѣла ввиду сообщить ученику навыки и умѣнья, пригодные ему для извѣстной отрасли жизненной дѣятельности. Теперь, наоборотъ, школа проникла въ массу народа, сдѣлалась общедоступной и должна быть поэтому общеобразовательной, развивающей душевныя силы дѣтей и воспитывающей.

Съ этой точки зрѣнія не такъ важно количество задачъ, и не такъ важны ихъ отдѣлы, какъ важенъ путь ихъ рѣшенія. Надо, чтобы рѣшеніе задачъ основывалось на соображеніи и развивало сообразительность, а не строило свою опору на привычкѣ и простомъ запоминаніи.

Все вниманіе составителей сборниковъ должно сосредоточиваться на томъ, чтобы расположить работу строго послѣдовательно и систематично, съ переходомъ отъ простого къ сложному и отъ нагляднаго къ отвлеченному, безъ рѣзкихъ скачковъ отъ легкаго къ трудному. Если такъ расположить задачи, то ученикъ самъ, своимъ личнымъ мышленіемъ будетъ доходить до рѣшенія все болѣе и болѣе сложныхъ задачъ. Въ такомъ случаѣ учителю не придется на каждомъ шагу наставлять ученика и помогать ему: все дѣло учителя сосредоточится на подборѣ матеріала, расположеннаго цѣлесообразно. Методъ самостоятельнаго вывода—идеальный методъ въ математикѣ, и ему въ ней предстоитъ будущность.

Между тѣмъ, въ послѣдніе годы, отчасти подъ вліяніемъ строгихъ экзаменныхъ требованій, вошло въ моду дѣленіе ариѳметическихъ задачъ на мелкіе типы. Это вредное увлеченіе. Оно ведетъ къ вызубркѣ и встряхиваетъ опять тѣ порядки, которые стали было затягиваться пылью сѣдой старины *). Не дробленіе на типы, главнымъ образомъ по внѣшнему виду, но строго постепенный подборъ сослужитъ службу при рѣшеніи задачъ. подводить же подъ типы—дѣло ученика, и тотъ, кто снимаетъ съ него эту работу мысли, тѣмъ самымъ лишаетъ его значительной части той пользы, какая проистекаетъ отъ занятій математикой.

Добавочныя статьи ариѳметическаго курса.

Если взять десятокъ-другой учебниковъ ариѳметики, изданныхъ въ послѣдніе годы на русскомъ языкѣ, то увидимъ, что всѣ они очень похожи другъ на друга. Если просмотрѣть учебники на разныхъ языкахъ за послѣднее столѣтіе, то увидимъ разницу въ матеріалахъ и въ его объясненіи. Но эта разница сдѣлается рѣзко-очевидной, если сопоставить учебники древняго времени съ учебниками новаго. О характерѣ объясненій въ старинное время или, вѣрнѣе, объ отсутствіи объясненій мы уже упоминали. Но самое содержаніе ариѳметики сейчасъ далеко не то, каково оно было прежде. Приведемъ нѣсколько подробностей.

*) Изобрѣтеніемъ всевозможныхъ типовъ и многочисленныхъ правилъ отличился еще въ средніе вѣка германскій педагогъ Видманнъ (въ 15 ст.). Съ него пошли эти порядки.

Въ ариѳметикѣ, составленной Павломъ Цвѣтковымъ (1834 г.), есть отдѣлъ объ извлеченіи квадратныхъ и кубическихъ корней. Этотъ отдѣлъ исключенъ изъ ариѳметики вообще около средины 19-го вѣка. Корни извлекаются у Цвѣткова изъ отвлеченныхъ чиселъ и изъ именованныхъ. Напр., корень квадратный изъ 4 дней 302 час. 369 мин. квадратныхъ составляетъ 2 дня 3 часа 3 мин.; при этомъ вводится квадратный день, въ которомъ 576 квадр. ч. и кв. часъ въ 3600 кв. минутъ—все это несообразности.

До второго десятилѣтія 19-го в. вставлялись въ ариѳметику логариѳмы, и это начали дѣлать съ самаго ихъ примѣненія къ математикѣ, т. е. съ 17 ст. У Василія Загорскаго (1806 г.) логариѳмы подробно объяснены, и къ нимъ приложены таблицы: въ этихъ таблицахъ содержатся логариѳмы чиселъ до 10000 съ семью десятичными знаками.

Въ «Начальныхъ основаніяхъ ариѳметики», сочиненныхъ Степаномъ Румовскимъ (1760 г.), помѣщены прогрессіи, которыя мы встрѣчаемъ у всѣхъ его предшественниковъ. У Магницкаго въ его извѣстной «Ариѳметикѣ, сирѣчь наукѣ числительной», которая «съ разныхъ діалектовъ на славенскій языкъ преведена, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена», вся вторая книга, т. е. вторая половина, содержитъ такіе отдѣлы, которые сейчасъ у насъ не признаются ариѳметическими и ни въ какомъ случаѣ не помѣщаются въ учебникахъ ариѳметики. Это, во-первыхъ, ариѳметика-алгебраика, по нашему сказать, алгебра, съ ея нумераціей и дѣйствіями и съ извлеченіемъ такихъ мудреныхъ корней, что одно названіе ихъ приводитъ въ недоумѣніе: биквадратъ или зензизензусъ—корень 4-й степени, солидусъ или сурдесолидусъ—5-й степени, квадратокубусъ или зензикубусъ—6-й степени, бисурдесолидусъ или бисолидусъ—7-й степени, триквадратъ или зензизензусъ отъ зенза—8-й степени, бикубусъ, кубокубусъ, сугубый кубусъ—9-й ст.; квадратъ солида, зенсурдесолидъ—10-й ст.; кубосурдесолидъ, терсолидъ—11-й ст., биквадратокубусъ—12-й ст. За этими корнями, которые, впрочемъ, болѣе странны и обширны своими названіями, чѣмъ процессомъ извлеченія, идетъ ариѳметика-логистика или астрономская «како въ градусахъ, минутахъ и секундахъ, и въ прочихъ колесъ сѣченіяхъ дѣйство и чинъ ариѳметика содержитъ»; здѣсь просто-напросто показывается, какъ дѣлать вычисленія съ градусами, минутами и секундами. Потомъ идетъ еще приложеніе, и на этотъ разъ геометрическаго характера «о геометрическихъ черезъ ариѳметику дѣйствуемыхъ», гдѣ рѣшаются примѣры на вычисленія площадей и объемовъ, и даже сообщаются свѣдѣнія изъ тригонометріи. Въ заключеніе идетъ глава «о земномъ размѣреніи и яже къ мореплаванію прилежатъ», тутъ есть таблицы широтъ и долготъ, описаніе вѣтровъ и т. п. Какое разнообразіе содержанія! Можно сказать, что ариѳметика Магницкаго— это цѣлая энциклопедія: въ ней собраны всевозможные случаи, гдѣ только можетъ пригодиться вычисленіе: и изъ хозяйства, и изъ ремеслъ, и изъ гражданской и военной жизни. Сочинитель заботился, чтобы его книга всѣхъ удовлетворила и ни одного вопроса не оставила безъ отвѣта, чтобы она всецѣло соотвѣтствовала требованіямъ практики.

Эта пестрота и этотъ наборъ всевозможнаго матеріала, который складывается въ одну кучу, на всякій случай, авось пригодится гдѣ-нибудь въ жизни и хозяйствѣ, эта пестрота и случайность еще болѣе проскальзываютъ въ старинныхъ сборникахъ XVI—XVII вѣка. Чего-чего только тамъ нѣтъ. Какъ Плюшкинъ тащилъ въ свою груду всякій ненужный хламъ и рухлядь, и какъ любитель-коллекціонеръ добываетъ и вставляетъ въ свое собраніе всякія мелочи и подробности, такъ и авторы старинныхъ учебниковъ собирали въ ариѳметику все, что хоть сколько-нибудь подходитъ къ ея практическимъ требованіямъ и можетъ дать отвѣтъ на какой-нибудь числовой вопросъ. О смыслѣ, цѣлесообразности и воспитательномъ дѣйствіи науки не заботились: лишь бы только она годилась для жизни. Доходило дѣло до такихъ курьезовъ и странностей: «Есть убо человѣкъ, яко же повѣдають, на главѣ имѣя 3 швы и на углы составлены; женская же глава имѣетъ единъ шовъ, кругомъ обходя главу: да по тому знаменію и въ гробѣхъ знають, кая мужеска, кая-ли женска». «Хошь сыскати тварей обновленіе небу и землѣ, морю и звѣздамъ, солнцу и лунѣ, и индикту». Оказывается, небо поновляется въ 80 лѣтъ, а земля въ 40 лѣтъ, море въ 60 лѣтъ.

Въ составъ средневѣковыхъ ариѳметикъ входили еще такъ называемыя математическія развлеченія. Трудно и скучно было тогдашнимъ ученикамъ. Сухое изложеніе, мудреный языкъ, масса научныхъ терминовъ, отсутствіе объясненій *)—все это приводило къ тому, что ученье обращалось въ долбленье, и только болѣе счастливые, т. е. болѣе сильные, умы могли справляться съ матеріаломъ, перерабатывать и понимать. Вотъ когда появились поговорки: «корень ученья горекъ» и «лучше книги не скажешь». Чтобы хоть нѣсколько оживить учениковъ, утѣшить и ободрить, ихъ назидали, во-первыхъ, увѣщательными стихами, гдѣ воспѣвалась вся сладость подвига и вся цѣнность результатовъ, которыхъ имѣетъ достигнуть «мудролюбивый» отрокъ:

О любезный ариометикъ,
Буди наукъ не отметникъ,
Тщися еще быти усердъ,
Да будешь въ нихъ силенъ и твердъ,
Въ смѣтахъ какихъ дѣлъ купецкихъ,
И во всякихъ иныхъ свѣцкихъ.
Тѣмже въ Бога уповая
И на помощь призывая
Потрудися въ нихъ охотно,
Аще будетъ и работно.

Во-вторыхъ, давались задачи съ остроумнымъ содержаніемъ и требовавшія особенной изворотливости и догадки. Вотъ задача изъ сборника, приписываемаго Алькуину (въ 8 в. по Р. Х.). Рукопись относится приблизительно къ 1000 г. по Р. Х. «Два человѣка купили на 100 сольдовъ свиней и платили за каждыя пять штукъ по 2 сольда. Свиней они раздѣлили, продали опять каждыя 5 штукъ по 2 сольда и при этомъ получили прибыль. Какъ это могло случиться? А вотъ какъ: *на 100 сольдовъ приходится 250 свиней*, ихъ они раздѣлили пополамъ, на 2 стада, и изъ перваго стада отдавали по 2 свиньи на 1 сольдъ, а изъ второго по 3; тогда достаточно выдать по 120 штукъ изъ каждаго стада, такъ какъ придется получить 60 сольдовъ за свиней перваго стада, 40 за свиней второго, всего

*) Одіо, педагогъ 12 в. по Р. Х., очень затрудняется въ объясненіяхъ и оправдываетъ себя тѣмъ, что «все это гораздо легче объяснить устно, чѣмъ письменно».

100 сольдовъ: 5-ть же штукъ изъ каждаго стада останется въ прибыли». Требуется разгадать эту загадку.

Въ сборникѣ Алькуина содержится извѣстная задача о волкѣ, козѣ и капустѣ, которыхъ надо перевезти черезъ рѣку, съ такимъ условіемъ, что въ лодкѣ нельзя помѣщать волка съ козой, козы съ капустой, и оставлять на берегу тоже нельзя вмѣстѣ, потому что они съѣдятъ: какъ же это устроить?

Лучшій сборникъ задачъ-загадокъ издалъ Баше-де-Мезиріакъ въ 1612 году, заглавіе его такое: Problemes plaisants et délectables qui se font par les nombres. Въ немъ помѣщена большая часть тѣхъ задачъ, какія встрѣчаются и сейчасъ въ сборникахъ этого рода, наприм., о задуманныхъ числахъ, о работникѣ, котораго нанимаетъ хозяинъ съ условіемъ платить ему за рабочіе дни и вычитать за прогульные, и т. д.

Въ старинныхъ русскихъ ариѳметикахъ можно отмѣтить такія интересныя задачи: «I. Пришелъ христіянинъ въ торгъ и принесъ лукошко яицъ. И торговцы его спрошали: много-ли у тебя въ томъ лукошкѣ яицъ? И христіянинъ молвилъ имъ такъ: язъ, господине, всего не помню на перечень, сколько въ томъ лукошкѣ яицъ. Только язъ помню: перекладывалъ язъ тѣ яйца изъ лукошка по 2 яйца, ино одно яйцо лишнее осталось на земли; и язъ клалъ въ лукошко по 3 яйца, ино одно же яйцо осталось; и язъ клалъ по 4 яйца, ино одно же яйцо осталось; и язъ клалъ по 5 яицъ, ино одно же яйцо осталось; и язъ ихъ клалъ по 6 яицъ, ино одно же яйцо осталось; и язъ клалъ по 7 яицъ, ино все посему пришло. Ино, сколько яицъ въ томъ лукошкѣ было, сочти ми? Придетъ было 721. II. Левъ съѣлъ овцу однимъ часомъ, а волкъ съѣлъ овцу въ 2 часа, а песъ съѣлъ овцу въ 3 часа. Ино, хощешь вѣдати, сколько бы они всѣ три: левъ, волкъ и песъ овцу съѣли вмѣстѣ вдругъ и сколько бы они скоро ту овцу съѣли, сочти ми *)? III. О деньгахъ въ кучѣ вѣдати. Аще хощеши въ кучѣ деньги вѣдати, и ты вели перевесть по 3 деньги. А что останется отъ 3-хъ — 2 или 1, и ты

---

*) Эта задача встрѣчается у Видмана, германскаго педагога XV вѣка; у него она выдѣлена въ особое правило — «правило о львѣ, волкѣ и собакѣ, съѣдающихъ овцу».

за 1 по 70. Да опять вели перевести по 5, и что останется — 4 или 3, или 2, или 1, и ты за 1 клади по 21. Да опять вели перевести по 7, и что останется — 6 или 5, или 4, или 3, или 2, или 1, и ты тако же за всякій 1 клади по 15. Да что въ остаткахъ перечни родились, и тѣ перечни сочти вмѣсто, а сколько станетъ, и ты изъ того перечню вычитай по 105, и что останется отъ сто пяти или сама сто пять, то столько въ кучѣ и есть».

Немаловажной статьей среди математическихъ развлеченій были магическіе квадраты. Что такое магическій квадратъ? Это рядъ чиселъ отъ 1 и до какого-нибудь предѣла, размѣщенныхъ по клѣткамъ квадрата такъ, что сумма чиселъ по діагоналямъ и по сторонамъ остается постоянной. Вотъ примѣры, взятые изъ сборника Алькуина (этотъ ученый особенно любилъ магическіе квадраты):

4	9	2	15
3	5	7	15
8	1	6	15
15	15	15	

2	7	6	15
9	5	1	15
4	3	8	15
[illegible]	15	15	

5	10	3	18
4	6	8	18
9	2	7	18
18	18	18	

Они встрѣчаются [illegible] сочиненіяхъ секты Чистыхъ братьевъ, существовавшей [illegible] по Р. Х. въ г. Аль-Бассера. Эта секта приписывала магическимъ квадратамъ особенную таинственную силу. Вѣрили, что они способны измѣнить расположеніе звѣздъ при рожденіи младенца и помочь ему.

Въ концѣ ариѳметики Іоанна Севильскаго (1150 года) приведенъ такой магическій квадратъ:

```
4 — 9 — 2
  ╲   ╱
3 — 5 — 7
  ╱   ╲
8 — 1 — 6
```

Объясненія не дано, только помѣщены тѣ же самыя черточки, какія и на этомъ чертежѣ.

Исторія алгебры.

Хотя народы древняго міра не знали нашей алгебры, но это не мѣшало имъ заниматься такими вопросами, которые принадлежатъ, собственно говоря алгебрѣ. Еще у египтянъ въ древнѣйшей рукописи-папирусѣ Ринда рѣшаются уравненія первой степени съ однимъ неизвѣстнымъ; въ этихъ уравненіяхъ мы встрѣчаемъ и знаки, напр., своеобразный знакъ равенства ∠. Задача помѣщена между прочимъ такая: «$\frac{2}{3}$ цѣлаго числа вмѣстѣ съ его $\frac{1}{2}$ и $\frac{1}{7}$ и съ этимъ же цѣлымъ числомъ даютъ 33, найти неизвѣстное». Прежде всего отбираются извѣстные члены въ одну часть, а неизвѣстные въ другую, коэффиціенты при неизвѣстныхъ представляются основными дробями (т. е. съ числителемъ 1) или же выражаются въ одинаковыхъ доляхъ и складываются, величина неизвѣстнаго опредѣляется такъ: въ первомъ случаѣ умножается коэффиціентъ на подходящее число, такъ чтобы въ произведеніи получился извѣстный членъ, а во второмъ множатъ извѣстный членъ на знаменателя коэффиціента и полученное дѣлятъ на числителя.

Греческіе ученые занимались алгеброй въ періодъ времени съ VI ст. до Р. Х. и кончая IV ст. по Р. Х. Они разработали нѣсколько отдѣловъ ея, но ихъ труды идутъ въ иномъ направленіи, чѣмъ какого держится новѣйшая математика, именно они носятъ на себѣ геометрическую окраску.

Прежде всего Пиѳагоръ (въ VI ст. до Р. Х.) и Платонъ (въ V ст.) рѣшили въ цѣлыхъ числахъ уравненіе $x^2+y^2=z^2$.

Пиѳагоръ далъ такія формулы: $x^2=\left(\frac{a^2-1}{2}\right)^2$, $y^2=a^2$, $z^2=\left(\frac{a^2+1}{2}\right)^2$,

гдѣ a равно любому нечетному числу; по Платону $x^2=\left(\frac{a^2}{4}-1\right)^2$,

$y^2=a^2$, $z^2=\left(\frac{a^2}{4}+1\right)^2$, гдѣ a любое четное число.

Діофантъ, жившій въ Александріи въ 4 в. по Р. Х., оказалъ алгебрѣ большія услуги. До него древніе не знали употребленія буквъ при доказательствахъ въ общемъ видѣ, Діофантъ же первый сталъ вводить различные знаки для неизвѣстныхъ величинъ, главнымъ образомъ греческія буквы; ему обязана своей разработкой глава объ уравненіяхъ, именно объ уравненіяхъ первой степени со многими неизвѣстными и о полныхъ квадратныхъ уравненіяхъ. Вотъ примѣръ изъ Діофанта:

$$x+y=10,\quad x^2+y^2=68,$$

дѣлимъ 1-е уравненіе на 2 и получаемъ $\frac{x+y}{2}=5$,

теперь положимъ, что $\frac{x-y}{2}=d$, тогда

$$x=5+d,\quad y=5-d$$
$$(5+d)^2+(5-d)^2=68$$
$$50+2d^2=68$$
$$d=3,\quad x=8,\quad y=2.$$

Діофантъ занимался также неопредѣленными уравненіями первой и второй степени, но ему не удалось найти полнаго ихъ рѣшенія въ цѣлыхъ числахъ; это сдѣлали уже Эйлеръ, нѣмецкій математикъ 18 в. и французскій математикъ Лагранжъ (1736—1813).

Индусы называли неизвѣстныя величины, которыя мы теперь обозначаемъ черезъ x, y, z и т. д., черной величиной, голубой, желтой, зеленой, красной и обозначали ихъ первыми буквами тѣхъ словъ, которыя выражаютъ эти цвѣта. Индусскіе математики 6—12 в. по Р. Х. знакомы были, правда, съ греческой ариѳметикой и алгеброй, но они далеко опередили грековъ. Они знали ирраціональныя числа, знали, что всякій квадратный корень имѣетъ два значенія: положительное и отрицательное, и дошли до мнимыхъ величинъ. Баскара (въ 12 в.) принялся за кубическія уравненія, и вотъ его примѣръ:

$$x^3+48x=12x^2+72$$

вычтемъ по

$$\frac{12x^2+64=12x^2+64}{x^3-12x^2+48x-64=8}$$
$$(x-4)^3=2^3$$
$$x-4=2$$
$$x=6$$

Вплоть до 18 вѣка индусскіе математики являлись учителями европейскихъ математиковъ и образцами для нихъ, и лишь Лагранжу и Эйлеру удалось двинуть науку далѣе и превзойти индусовъ.

Арабскіе ученые переняли отъ индусовъ начала алгебры и перенесли въ Европу, гдѣ ею занялись главнымъ образомъ итальянцы

Лука-де-Бурго (въ 15 ст.) перешелъ къ уравненіямъ 4-й степени, и рѣшалъ тѣ изъ нихъ, которыя приводятся къ квадратнымъ. Тарталья и Карданъ (въ 16 ст.) объяснили рѣшеніе кубическихъ уравненій, притомъ всякихъ безъ исключенія, а Людовикъ Феррари далъ общую формулу рѣшенія уравненій 4-й степени.

Віета (1540—1603) положилъ начало общей ариѳметикѣ тѣмъ, что сталъ обозначать буквами не только искомыя количества, но и данныя: до него же буквами обозначались только тѣ количества, которыя требовалось опредѣлить; по способу Віета извѣстныя величины въ уравненіяхъ обозначались согласными буквами латинскаго алфавита, а неизвѣстныя—гласными.

За Віетой слѣдовалъ англичанинъ Гарріотъ (1560—1621). Онъ нашелъ, что всякое уравненіе высшихъ степеней является произведеніемъ уравненій низшихъ степеней, что между коэффиціентами и корнями уравненія есть опредѣленная зависимость; онъ ввелъ знакъ неравенства и предложилъ писать буквенныхъ множителей рядомъ, безъ всякаго знака; но коэффиціентъ онъ отдѣляетъ отъ буквы точкой и степени обозначаетъ повтореніемъ количества, т. е. вмѣсто a^3 пишетъ aaa. Французъ Декартъ (1596—1650) положилъ начало аналитической геометріи и ввелъ нынѣшнюю форму цѣлыхъ степеней. Голландецъ Жираръ ввелъ скобки, Исаакъ Ньютонъ (1642—1727)—дробныя степени и биномъ, шотландецъ Непиръ (въ 17 ст.)—логариѳмы съ натуральнымъ или гиперболическимъ основаніемъ $e = 2{,}7182818\ldots$

Вскорѣ послѣ него англійскій профессоръ Бриггъ (ум. въ 1630) вычислилъ логариѳмы при основаніи 10. Такимъ образомъ, получается 7 дѣйствій общей ариѳметики: сложеніе, вычитаніе, умноженіе, дѣленіе, возвышеніе въ степень, извлеченіе корня, логариѳмированіе; иные присоединяютъ еще восьмое дѣйствіе—нахожденіе числа по логариѳму. Теорія чиселъ, т. е. ученіе о свойствахъ чиселъ, была извѣстна въ нѣкоторой степени еще древнимъ грекамъ. Особенное развитіе она получила въ новѣйшее время.

Источники по исторіи ариѳметики.

Большая часть трудовъ по исторіи ариѳметики принадлежитъ нѣмецкой литературѣ: нѣмецкая ученость особенно занимается этими вопросами. Мы для своей работы воспользовались слѣдующими источниками:

1. *M. Sterner.* Geschichte der Rechenkunst. 1891. стр. 533. Это самая лучшая книжка въ своемъ родѣ, мы ее порекомендовали бы всякому, кто хочетъ узнать исторію ариѳметики; она очень доступна, обстоятельна и недорога, изложеніе въ ней чисто-литературное.

2. *W. Adam.* Geschichte des Rechnens und des Rechenunterrichts. Zum Gebrauch an gehobenen und höheren Lehranstalten, sowie auch bei der Vorbereitung auf die Mittelschullehrer-und Rektoratsprüfung. 1892. стр. 182. Составлена по программѣ, изданной для учителей среднихъ учебныхъ заведеній; какъ видно, въ Германіи требуется отъ учителей не только знать науку, но и обладать свѣдѣніями по ея исторіи. Книжка Адама невелика, конспективна; хотя она и написана простымъ языкомъ, но изложеніе въ ней суховато: много перечисленій и мало обобщеній.

3. *M. Kantor.* Vorlesungen über Geschichte der Mathematik. Zweite Auflage. 1894. Стран. 883+863. Громадная работа по исторіи математики: считается чрезвычайно авторитетнымъ источникомъ, изъ котораго черпаютъ всѣ остальные авторы. Канторъ—общепризнанный спеціалистъ по своему предмету.

Изложеніе у него доступное, хотя, по самому характеру книги, содержитъ много подробностей и тонкихъ изслѣдованій. Цѣна не дешевая—болѣе 25 руб.

4. *H. Hankel.* Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter. 1874. Страницъ 410. Рядъ хорошихъ очерковъ по исторіи математики.

5. *G. Friedlein.* Die Zahlzeichen und das elementare Rechnen der Griechen und Römer und des christlichen Abendlandes vom 7 bis 13 Jahrhundert. 1869. Стр. 164. Для своихъ отдѣловъ эта книжка хо-

роша: правда, она написана нѣсколько спеціально, съ цитатами и мелкими подробностями, но въ общемъ она доступна.

6. *P. Treutlein.* Das Rechnen im 16 Jahrhundert. 1877. Стр. 100. Хорошая картина 16-го вѣка, того самаго вѣка, когда стали обрисовываться основы нашей ариѳметики.

7. *F. Unger.* Die Methodik der praktischen Arithmetik in historischer Entwickelung vom Ausgange des Mittelalters bis auf die Gegenwart. 1888. Стр 240. Работа Унгера неудобна для того, кто желалъ бы начать съ нея знакомство съ исторіей ариѳметики. Унгеръ слишкомъ гоняется за подлинными выписками, даже такими, которыя не представляютъ большого интереса, и слишкомъ окрашиваетъ свои очерки въ колоритъ спеціально нѣмецкой школы. У него много замѣчаній относительно методики, однако и ихъ гораздо интереснѣе читать по Штернеру.

Изъ французскихъ авторовъ мы могли воспользоваться только однимъ, именно:

8. *G. Libri.* Histoire des sciences mathématiques en Italie, depuis la renaissance des lettres jusq'à la fin du dix-septième siècle. 1835—1865. Стр. 456+530+444+492. Это довольно старая книжка, и въ ней трудно найти что-нибудь новое, сравнительно съ тѣми пособіями, какія перечислены выше.

На русскомъ языкѣ пользуются извѣстностью труды профессора Московскаго университета В. В. Бобынина, который съ 1883 года читаетъ лекціи по этому предмету. Мы въ особенности обязаны свѣдѣніями слѣдующимъ интереснымъ очеркамъ:

9. *В. В. Бобынинъ.* Очерки исторіи развитія физико-математическихъ знаній въ Россіи. XVII столѣтіе. 1886 г. Стр. 123.

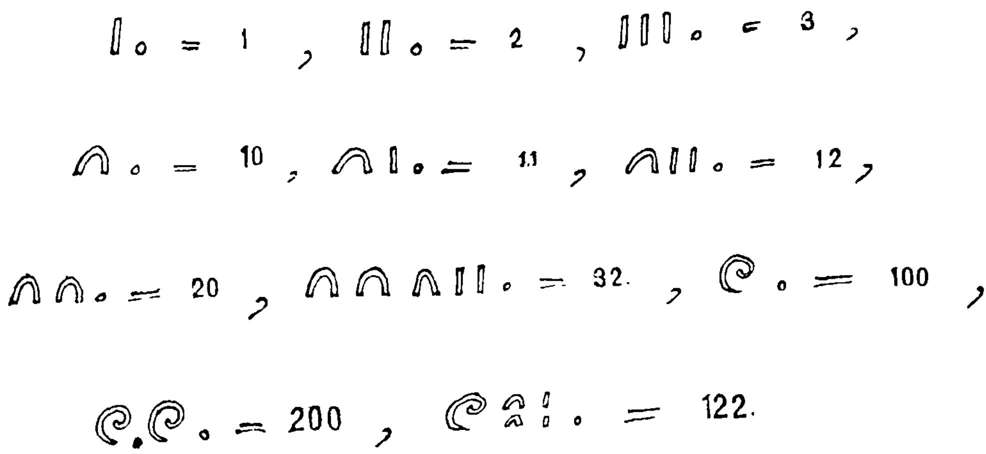
10. *В. В. Бобынинъ.* Очерки исторіи донаучнаго періода развитія ариѳметики. 1896 г. Стр. 48.

11. *В. В. Бобынинъ.* Очерки исторіи развитія математическихъ наукъ на Западѣ. 1896 г. Стр. 30+129.

ПРИЛОЖЕНІЕ.

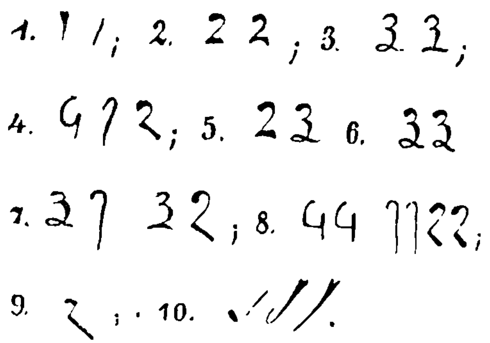
ТАБЛИЦА ЦИФРЪ.

1. Іероглифическія цифры египтянъ.

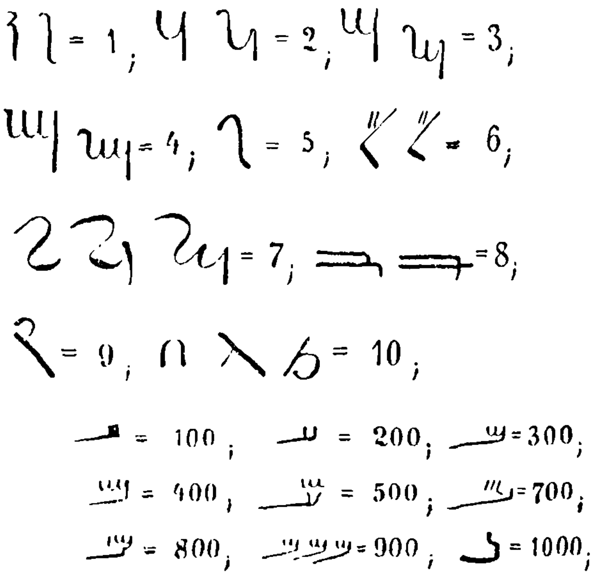


2. Іератическія цифры египтянъ:

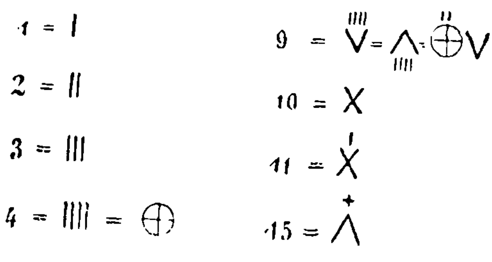
а) порядковыя.

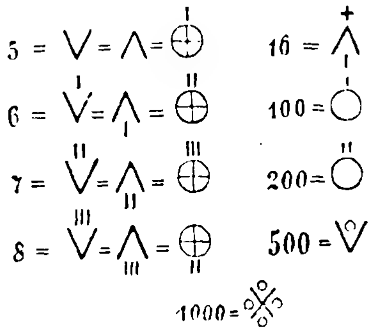


в) количественныя.

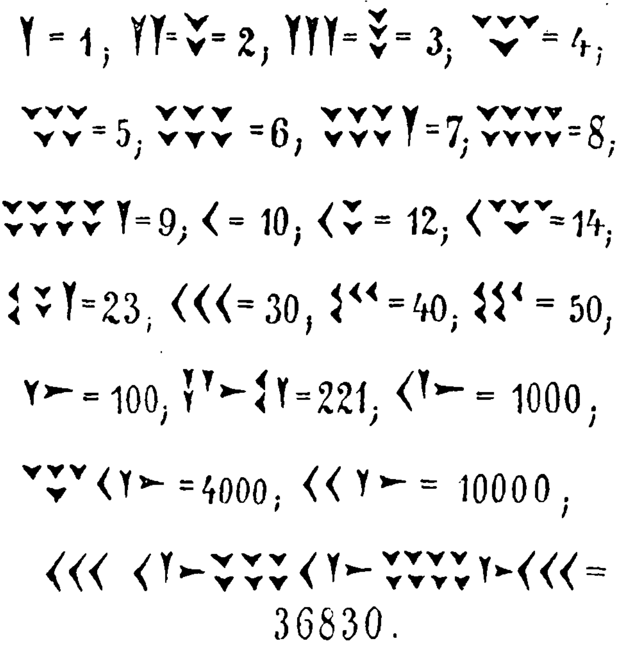


3. Народныя цифры египтянъ.



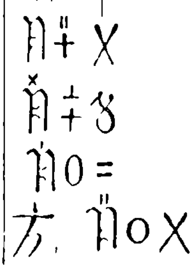


4. Халдейскія цифры.



5. Китайскія цифры: А) старинныя, В) современныя.

A	B	
一	〡	1
二	〢	2
三	〣	3
四	〤	4
五	〥	5
六	〦	6
七	〧	7
八	〨	8
九	〩	9
十	十	10
百	百	100
千	千	1000
萬	万	10000



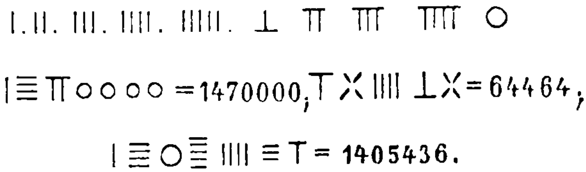
= 124

= 465

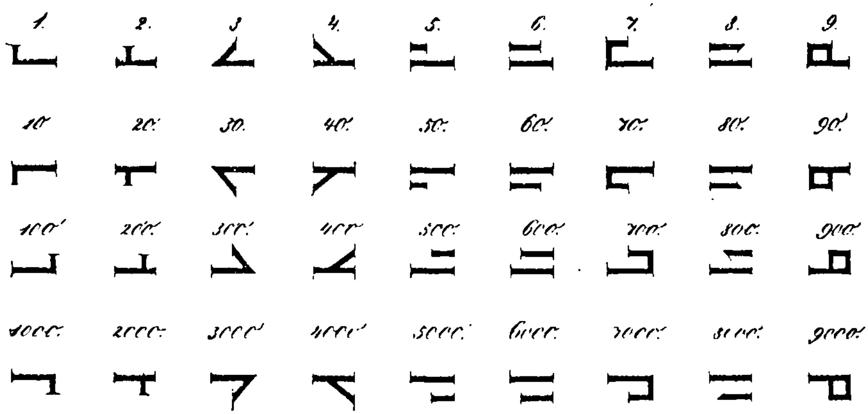
= 102

= 10204

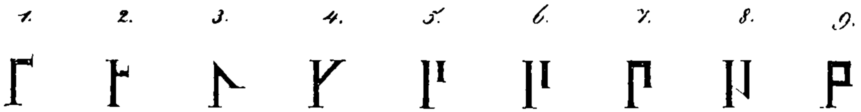
6. Научныя цифры китайцевъ.



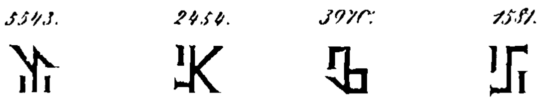
7. Цифры средневѣковыхъ астрологовъ.



или



и т. д.



8. Еврейскія цифры.

א	a	1
ב	b	2
ג	g	3
ד	d	4
ה	h	5
ו	v	6
ז	z	7
ח	ch	8
ט	t	9

9. Обозначеніе большихъ чиселъ по-славянски.

Тьмы: а, в, г, д и т. д.

Легіоны: а, в, г, д и т. д.

Леодры: а, в, г, д и т. д.

Вранов: ҂к а к, к в к и т. д.

10. Видоизмѣненіе такъ наз. арабскихъ цифръ.

Цифры восточныхъ арабовъ.

Цифры X вѣка.

Цифры Гобаръ.

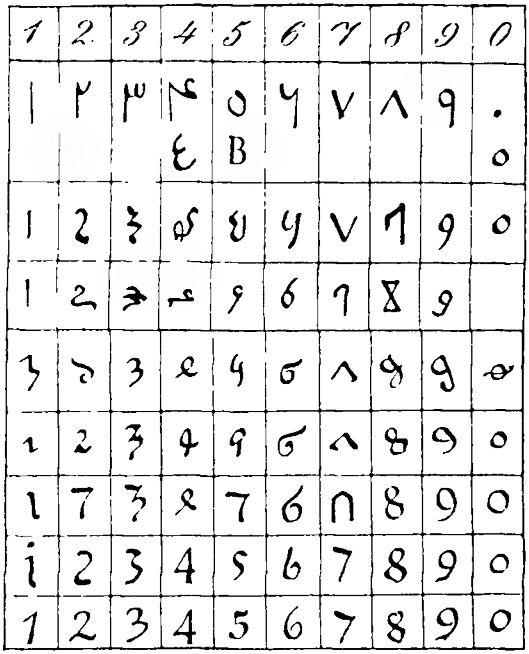
XII.

XIII.

XIV.

1508 г.

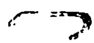
1550 г.



11. Греческіе знаки дѣйствій.

Сложенія: I

Вычитанія: 

Равенства: 

ОГЛАВЛЕНІЕ.

Книгоиздательство Д. И. ТИХОМИРОВА:

ДРУЖИНИНЪ, Н. П. Общедоступное руководство къ изученію законовъ. Часть I. Начальныя понятія, общія опредѣленія и практическія указанія. Часть II. Правомѣрныя начала управленія въ Россіи. Изд. 3-е. Ц. за обѣ части 60 к. Во второмъ изданіи Гл. Упр. В. У. З. **рекомендовано** въ библіот. военныхъ училищъ и въ фундамент. библ. кадетскихъ корпусовъ. О. О. У. К. М. Н. П. **допущено** въ ученическія библ., старш. возр., въ библ. среднихъ учебныхъ заведеній, городскихъ училищъ, въ учительскія библ. низшихъ училищъ и въ безплатн. народныя библ. и читальни. (Отношеніе № 25760, отъ 30 сентября 1904 г.)

ЕГО ЖЕ. Волостное правленіе и волостной старшина. Второе изданіе. Ц. 20 к. О. О. У. К. М. Н. П. во второмъ изданіи **допущена** въ безплатныя народныя библіотеки и читальни и для публичныхъ народныхъ чтеній. (Отношеніе № 17348, отъ 5 іюня 1904 г.)

ЕГО ЖЕ. Волостной сходъ. Разсказъ о томъ, какъ устроили и дѣйст. волостныя крест. установленія. Ц. 25 к. О. О. У. К. М. Н. П. **допущена** въ безплатныя народ. читальни и для публич. народныхъ чтеній. (Отношеніе № 3500, отъ 16 марта 1905 г.)

ЕГО ЖЕ. Избиратели и народные представители. Общедоступный очеркъ конституціоннаго права, съ изложеніемъ предположеній о реформѣ въ Россіи и закона о Государственной Думѣ. Ц. 1 р.

ЕГО ЖЕ. Крестьяне-граждане. Народное чтеніе. Ц. 20 к.

ЕГО ЖЕ. Отдѣльныя главы изъ книги: **Избиратели и народные представители:**

ЕГО ЖЕ. Права человѣка и гражданина. Ц. 10 к.

ЕГО ЖЕ. Формы правленія. (Монархія неограниченная, монархія конституціонная, республика.) Ц. 8 к.

ЕГО ЖЕ. Выборы народныхъ представителей. Ц. 10 к.

ЕГО ЖЕ. Палаты народныхъ представителей. Ц. 12 к.

ЕГО ЖЕ. Томасъ Ралэ. Элементарная политика. Переводъ съ англійскаго. Ц. 45 к.

ДЮКУДРЭ. ИСТОРІЯ цивилизаціи. Подъ редакціей **Д. А. Коропчевскаго.** Т. I Ц. 1 р. Т. II. Ц. 1 р. 50 к. У. К. М. Н. П. книги **допущены** въ ученическія, старшаго возраста, библіотеки средн. учебн. заведеній. (Ж. М. Н. Пр. № 12, 1900 г.)

ИВАНОВЪ, Ив. Ив. Бѣлинскій. Біографическій очеркъ, съ портретомъ и факсимиле Ц. 10 к.

ЕГО ЖЕ. Ломоносовъ. Ц. 15 к.

ИГНАТЬЕВЪ, В. Е. д-ръ. Физіологическіе очерки. Выпускъ первый. Ц. 60. Содержаніе: Введеніе. Кровь. Кровообращеніе. Пищевареніе. Дыханіе. О. О. У. К. М. Н. П. книга **допущена** въ ученическія библіотеки низшихъ учебн. заведеній. (Отн. отъ 15 октября 1904 г., № 26196.)

ЕГО ЖЕ. Научныя основы физическаго воспитанія. Съ рисунками и діаграммами. Ц. 1 р.

КАЛЛАШЪ, В. В. Очерки по исторіи русской школы. Ц. 1 р.

КОГАНЪ, П. С. Опытъ исторической хрестоматіи Западно-Европейскихъ литературъ Ц. 1 р. 25 к.

КОРОПЧЕВСКІЙ, Д. А. Желтый вопросъ. Ц. 15 к. О. О. У. К. М. Н. П. книга **допущена** въ учительскія библіотеки низшихъ учебныхъ заведеній и въ безплатныя народныя читальни и библіот. (Отношеніе № 10695, отъ 17 апрѣля 1902 г.)

ЕГО ЖЕ. Введеніе въ политическую географію. (Географія человѣка.) Предисловіе. Географическое положеніе. Пространство. Границы. Строеніе поверхности. Моря, рѣки и озера. Климатъ и почва. Естественныя богатства. Распредѣленіе человѣчества по земной поверхности. Населенныя мѣста: города и деревни. Пути и средства сообщенія. Торговля. Колонизація. Культура. Ц. 65 к. О. О. У. К. М. Н. П. **допущена** въ учител. библ. низшихъ училищъ. (Отношеніе № 20490, отъ 3 іюля 1904 года.)

НА ТРУДОВОМЪ ПУТИ. Литературно-художественный сборникъ къ тридцатипятилѣтію литературно-педагогической дѣятельности Д. И. Тихомирова. 1866—1901.— 13/VIII. (Чистый сборъ отъ продажи сборника поступаетъ на стипендіи Дмитрія Ивановича Тихомирова для дѣтей-сиротъ учителей народныхъ школъ.)

Большой томъ съ 26 вкладными рисунками лучшихъ русскихъ художниковъ, множествомъ рисунковъ въ текстѣ, съ портретами авторовъ и ихъ факсимилэ. Содержаніе: Біографіи, разсказы, очерки, стихотворенія, сказанія, миньятюры, путевыя записки, воспоминанія, научныя статьи, музыкальныя пьесы, хоры. Въ сборникѣ помѣщены между прочимъ произведенія: Немировича-Данченко, Острогорскаго, Альбова, Бунина, Мамина-Сибиряка, Потапенко, Чехова, Елпатьевскаго, Телешева, Стороженко, Златовратскаго, Случевскаго, Гольцева, Щепкиной-Куперникъ, Дрожжина, Сергѣя Глаголь, Михеева, Скабичевскаго, Тищенко, Носилова, Гославскаго, Коропчевскаго, Ладыженскаго, Соловьева-Несмѣлова, Рубакина. Ц. 2 р. О. О. У. К. М. Н. П. **допущена** въ учител. библ. городскихъ и уѣздныхъ училищъ. (Ж. М. Н. П. № 3, 1902 г.)

НИКИФОРОВЪ, Л. П. Элементарный курсъ психологіи. Руководство для воспитателей. (По Карре и Ликьё.) Ц. 25 к.

ОСТРОГОРСКІЙ, В. П. Выразительное чтеніе. Пособіе для учащихъ и учащихся. Изд. 5-е. Ц. 50 коп. О. О. У. К. М. Н. П. **допущено** въ учительскія библіотеки низшихъ училищъ, а также и въ безплатныя народныя читальни. (Отношеніе № 179, отъ 4 августа 1904 года.)

ЕГО ЖЕ. Изъ сочиненій Бѣлинскаго. Для семьи и школы. Подъ редакціей В. П. Острогорскаго. Съ біографіей и портретомъ Бѣлинскаго. Ц. 1 р.

ПЕТРИ, Э. Ю. Методы и принципы географіи. Руководство по методикѣ географіи. 2-е изд. Ц. 1 р. О. О. У. К. М. Н. П. книга **допущена** для фундамент. библіотекъ средн. уч. завед., для библіотекъ учит. институтовъ и семинарій и для библіотекъ педагогическихъ классовъ женскихъ гимназій, въ учительскія библіотеки городскихъ по Положенію 31 мая 1872 г. училищъ. Отношеніе № 11654, отъ 9 апрѣля 1904 г.)

ПЕРСИ ФАРАДЭЙ ФРАНКЛЭНДЪ. Наши тайные друзья и враги. Бактер. очерки, пер. подъ ред. Д. А. Коропчевскаго. Ц. 30 к. У. К. М. Н. П. книга **одобрена** для фундаментальныхъ библіотекъ средне-учебныхъ заведеній и для учительскихъ библіотекъ низшихъ училищъ. (Отношеніе № 11226, отъ 28 апрѣля 1900 г.)

СИЛАКОВЪ, А. Руководство къ составленію учениками домашнихъ сочиненій въ связи съ внѣкласснымъ чтеніемъ. Ц. 60 коп. У. К. М. Н. П. **допущена** въ учительскія библ. низшихъ учебн. завед. (Отн. № 9443, 20 авг. 1905 г.)

СТРОГОНОВЪ, С. А. Библіографическій справочникъ о книгахъ для народнаго и дѣтскаго чтенія по 1898 г. Ц. 10 к. М. 1901 г.

ПЯСКОВСКІЙ, Н. Я., д-ръ. О долголѣтіи и сохраненіи молодости. Ц. 12 к.

ТИХОМИРОВЪ, Д. И. Дѣти солнца и дѣти земли. Посвящается народн. учит. Ц. 3 к.

ЕГО ЖЕ. Наканунѣ свободы просвѣщенной. Ц. 3 к.

ЕГО ЖЕ. „Законъ Божій" и „ученіе человѣческое". Ц. 5 к.

ТЭНЪ БРИНКЪ. Лекціи о Шекспирѣ. Переводъ И. Т. Городецкаго. Ц. 40 к.

Труды Педагогическаго Общества I. Изд. 1900 г. Ц. 2 р. 25 к.

ФАРРАРЪ, Ф. В. Жизнь Іисуса Христа. Переводъ О. М. Матвѣева. 3-е изданіе. Ц. 1 р. Съ иллюстраціями.